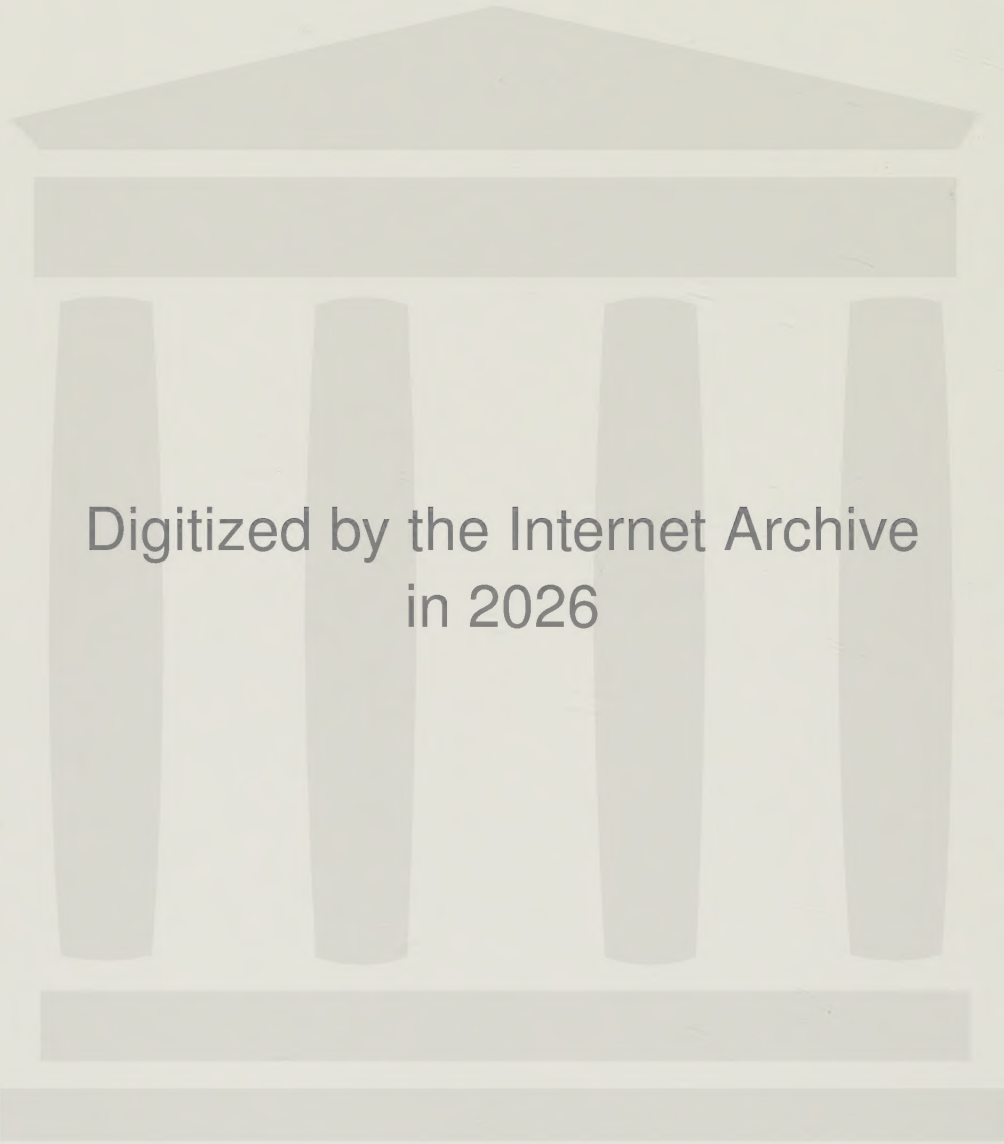


M. Löffel

Frankfurt a. M. 1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550820_0025

ÜBER DIE STABILITÄT DES DIRAC - VAKUUMS IN
ÄUSSEREN EICHFELDERN

Inaugural - Dissertation
zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissen-
schaften beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe - Universität
zu Frankfurt am Main
von

Michael Soffel
aus Ingelheim / Rh.

Frankfurt am Main

1979

DEE DIE VERGELIJKING VAN DE
KONINKRIJKE VAN NEDERLAND

INHOUD - INHOUD

184

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING



VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

VERGELIJKING VAN DE VERGELIJKING

Über die Stabilität des Dirac - Vakuums in
äußeren Eichfeldern

M. Soffel

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereiches Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität zu Frankfurt/Main

Dekan:	Prof.Dr.W.Martienssen
Leiter der Arbeit:	Prof.Dr.W.Greiner
Erstgutachter:	Prof.Dr.W.Greiner
Zweitgutachter:	Prof.Dr.H.Dehnen (Konstanz)

Tag der letzten mündlichen Prüfung: 6.2.1980

Konventionen und Konstanten

Signatur der Metrik: (+---)

Koordinaten: $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

etwa in kartesischen Koordinaten

Häufig wird $G = c = \hbar = 1$ gesetzt. Dann ist:

$L_p = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1,616 \times 10^{-33} \text{ cm}$ die Einheit der Länge
(Plancklänge)

$T_p = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 5,391 \times 10^{-44} \text{ sec}$ die Einheit der Zeit
(Planckzeit)

Massen M werden durch ihren Schwarzschildradius
angegeben.

$$r_s (M_\odot) = 1,476 \times 10^5 \text{ cm}$$

$$r_s (M_{\text{Erde}}) = 0,444 \text{ cm}$$

$$G = 6,673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 / \text{g sec}^2$$

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 / \text{sec}$$

$$c = 2,997 \times 10^{10} \text{ cm / sec}$$

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ I Einleitung	1
§ II Die freie Dirac'sche Wirkungsfunktion	10
§ III Die Wirkungsfunktion und Eichtheorien über Lie - Gruppen	12
§ IV Eichtheorie der Gruppe $U(1)$ (Quantenelektro- dynamik)	18
§ V Eichtheorie der Poincaré - Gruppe (Einstein - Cartan - Theorie)	19
§ VI $SU(2)$ Yang - Mills - Felder	25
§ VII $SU(3)$ Yang - Mills - Felder	26
§ VIII Elemente der Bumpf - Theorie	28
§ IX Äußere elektromagnetische Felder	39
i) Dirac - Gleichung im elektrostatischen Feld	39
ii) Dirac - Gleichung im reinen Magnetfeld	40
iii) Das homogene Magnetfeld	41
iv) Beispiel eines inhomogenen Magnetfeldes	43
§ X Äußere Einstein - Felder	45
i) Dirac - Gleichung im Einstein - Feld	45
ii) statische, sphärisch symmetrische und asymptotisch flache Mannigfaltigkei- ten mit globaler Zeitkoordinate	49
iii) Das effektive Potential	50
iv) Dirac - Gleichung im Newton'schen Po- tential	51
v) Dirac - Gleichung im Feld einer gra- vitierenden Massenschale	52

vi)	Das Wasserstoffatom im Schwarzschild Feld	54
vii)	Dirac - Teilchen im Schwarzschild - Feld	56
viii)	Paarbildung durch geladene Schwarze Löcher	56
ix)	Grenzladung eines Reissner - Nordstrøm - Feldes	57
x)	Tritt das überkritische Vakuum für ge- ladene Schwarze Löcher in der Natur auf?	57
xi)	Entladungsvorgang des überkritisch ge- ladenen Schwarzen Loches, Entladungs- zeiten	58
§ XI	Äußere Torsionsfelder	60
i)	Dirac - Gleichung im simplen Torsions- modell	62
ii)	Statistische Behandlung des Vakuums mit Spin	65
iii)	Tritt das Vakuum mit Spin in der Natur auf?	68
§ XII	Dirac - Teilchen im Rindler - Raum	68
i)	Der gleichförmig beschleunigte Beob- achter und Rindler - Raum	68
ii)	Lösung der Dirac - Gleichung in den vier Sektoren des Minkowski - Raumes	71
iii)	Das Zusammenbrechen des Energiegaps für den beschleunigten Beobachter	75
iv)	Konstruktion einer QFT mit Hilfe der Rindler - Moden	81

v)	Konstruktion einer QFT des beschleunigten Beobachters	83
vi)	Die Rindler - Temperatur	84
vii)	Die masselose Dirac - Gleichung im Rindler - Raum	88
viii)	Analytische Eigenschaften der verschiedenen Moden, Darstellungsprobleme	90
§ XIII	Der gleichförmig beschleunigte Beobachter und Instantonen	93
i)	Die Theorie von Christensen und Duff	93
§ XIX	Beschleunigte Beobachter und konforme Abbildungen	103
i)	Beschleunigte Koordinatensysteme und konforme Abbildungen	103
ii)	Differentielle Windungszahl und Temperatur	107
iii)	Entropie und Euler - Charakteristik, Hawking - Temperatur	110
§ XV	Nichtlokale Strukturen in der Raum - Zeit	112
i)	Motivation	112
ii)	Ausgezeichnete Koordinatensysteme und Mach'sches Prinzip	114
iii)	Das klassische Bremsstrahlungsproblem im Minkowski - Raum	117
iv)	Bewegte Beobachter und der Fall der gleichförmig beschleunigten Ladung	122
v)	Klassische Bremsstrahlung und das Äquivalenzprinzip	128

vi)	Starke Gravitationsfelder, Ereignishorizonte etc.	132
§ XVI	Äußere Yang - Mills - Felder	136
i)	Klassische Yang - Mills - Felder	137
ii)	Überkritisches Farbvakuum und Color-Confinement	139
	Schlußworte und Ausblick	140a
Anhang		
A)	Zum Begriff der Mannigfaltigkeit	141
B)	Konstruktion der Wellenfunktionen $\Psi_{\omega}^{\pm}, \Psi_{\omega}$	143
C)	Berechnung von $({}^{\pm}\Psi_{p,r}, \Psi_{\omega,r}^{\pm})_{\Sigma_0}$	147
D)	Zur Konstruktion von $\tilde{\Psi}_{\omega}^{\pm}$	150
E)	Asymptotische Strukturen und Penrose-Diagramme	152
	Literaturnachweis	153
	Figurenbeschreibung	160

I Einleitung

Einer der grundlegenden Züge der relativistischen Quantenfeldtheorie ist ihr Charakter als Vielteilchentheorie. ^[1]

Dieser Aspekt wird dann wichtig, wenn man ein Quantenfeld an ein äußeres, klassisches (d.h. unquantisiertes) Feld koppelt: Paare von Teilchen können spontan aus dem Vakuum entstehen, wenn das äußere Feld genügend stark ist. Dies kann dadurch geschehen, daß das äußere Feld entweder stark raum- oder stark zeitabhängig ist. Normalerweise macht man sich diese beiden Erzeugungsprozesse durch zwei verschiedene Bilder klar. Im statischen Fall schreibt man die produzierten Paare den virtuellen Fluktuationen des Vakuums zu: aufgrund der Unschärferelation neigt selbst ein freies Quantenfeld dazu, virtuelle Paare der Masse m zu bilden.

Die Lebensdauer der virtuellen Paare ist dann von der Ordnung $t \sim \frac{\hbar}{mc^2}$. Wenn das virtuelle Paar während dieser Zeit weiter als eine Comptonwellenlänge voneinander getrennt wird und es mehr als die doppelte Ruhemasse an kinetischer Energie gewonnen hat, so wird das Paar reell. Wichtig ist also hierbei, daß die starke Raumabhängigkeit sich über ein genügend großes Raumstück erstreckt: ein Potentialsprung von weniger als 1 MeV erzeugt kein Teilchen.

Dieser Teilchenerzeugungsprozeß wird solange stattfinden bis entweder die Potentialdifferenzen im Eichfeld reduziert sind oder das Pauli - Prinzip eine weitere Paarbildung verhindert.

Falls dadurch das Dirac - Feld einen neuen Grundzustand einnimmt, sprechen wir von einer dynamisch gebrochenen Symmetrie. Den neuen Vakuumzustand nennen wir überkritisches Vakuum. ^[1,3]

Auf der anderen Seite resultiert die Möglichkeit der Paarbildung durch die Zeitabhängigkeit eines äußeren Eichfeldes durch die Tatsache, daß ein Quantenfeld aus einem Ensemble von unendlich vielen harmonischen Oszillatoren ("Moden") aufgefaßt werden kann. Wird das Quantenfeld dann von seinem Grundzustand (d.h. Vakuumzustand) angeregt, so werden reelle Teilchen produziert. In einigen Fällen sind diese zwei Möglichkeiten der Paarbildung durch äußere Eichfelder durch eine Eichtransformation miteinander verknüpft: ein global statisches äußeres Eichfeld wird ein dynamisches Feld repräsentieren, falls nur die Eichung entsprechend gewählt ist. Ein einfaches Beispiel ist das konstante elektrostatische Feld, welches man durch das statische Potential $A_\mu = (\vec{E} \cdot \vec{r}, 0)$ beschreiben kann, aber auch durch $A_\mu = (0, \vec{E} \cdot \vec{t})$.

Teilchenerzeugung in konstanten, starken elektrostatischen Feldern (das sog. Klein'sche Paradoxon) wurde quantitativ bereits von Heisenberg und Euler im Jahre 1936 ^[4] vorhergesagt, ohne von der Änderung des Vakuumzustandes zu reden. Jedoch konnte man erst mit dem Bau leistungsfähiger Schwerionenbeschleuniger (wie z. B. UNILAC der GSI, Darmstadt) damit rechnen, daß Experimente möglich wurden, die es ge-

statten, den starken Feldaspekt der QED zu überprüfen, welcher nicht in der üblichen Feynman - Dyson Störungsentwicklung der QED enthalten ist. Um zu verstehen, welches der momentane Stand der Forschung auf diesem Gebiet ist, betrachten wir Energieniveaudiagramme, die vorzüglich geeignet sind, den Mechanismus der Paarbildung in äußeren, global statischen Feldern zu verstehen.^[5,6] Fig. 1 a zeigt die am stärksten gebundenen Elektronenzustände für Atomkerne der Ladung Z . Obwohl der $1s_{1/2}$ - Zustand im Feld des Punktkernes (gestrichelte Kurve) bei $Z = 137 = \alpha^{-1}$ endet, kann man die Lösung für das ausgedehnte Coulombpotential bis zum negativen Energiekontinuum herunter verfolgen, welches bei einer kritischen Ladung von $Z_{cr} \approx 173$ erreicht wird. Für $Z > Z_{cr}$ taucht der gebundene Zustand in das negative Energiekontinuum ein und erscheint dort als Resonanzzustand. Falls der ursprünglich gebundene Zustand leer war, kann der überkritische Resonanzzustand aus dem Dirac See gefüllt werden. Die Löcher im Dirac See entweichen dann als Positronen aus dem System. Der große Wert der kritischen Kernladung ($Z_{cr} \approx 173$) bedeutet jedoch nicht, daß das Problem rein akademisch ist, auch wenn superschwere Kerne in nächster Zukunft nicht produziert werden können. Es besteht vielmehr die Hoffnung, daß man aus der Kollision schwerer Ionen entscheiden kann, ob Elektron - Positron Paare spontan gebildet werden oder nicht. In diesem Fall wird der spontane Zerfall des Vakuums und das Energieniveaudiagramm über die "adiabatische Näherung" des Stoßprozesses definiert. Wir bemerken, daß das Energieniveaudiagramm dann in

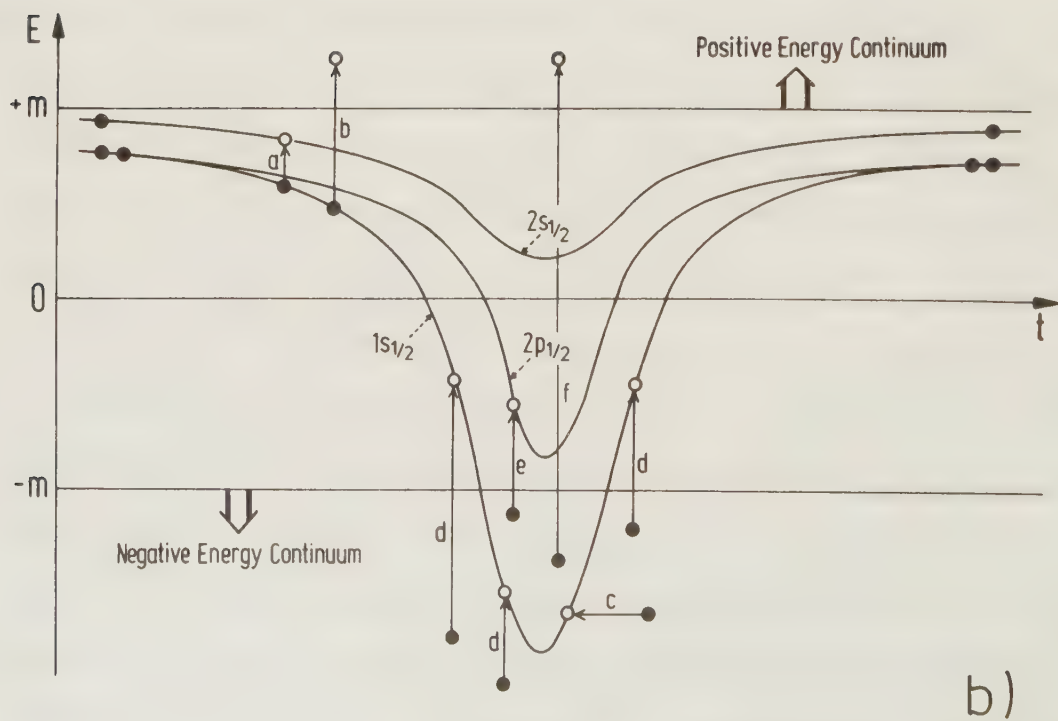
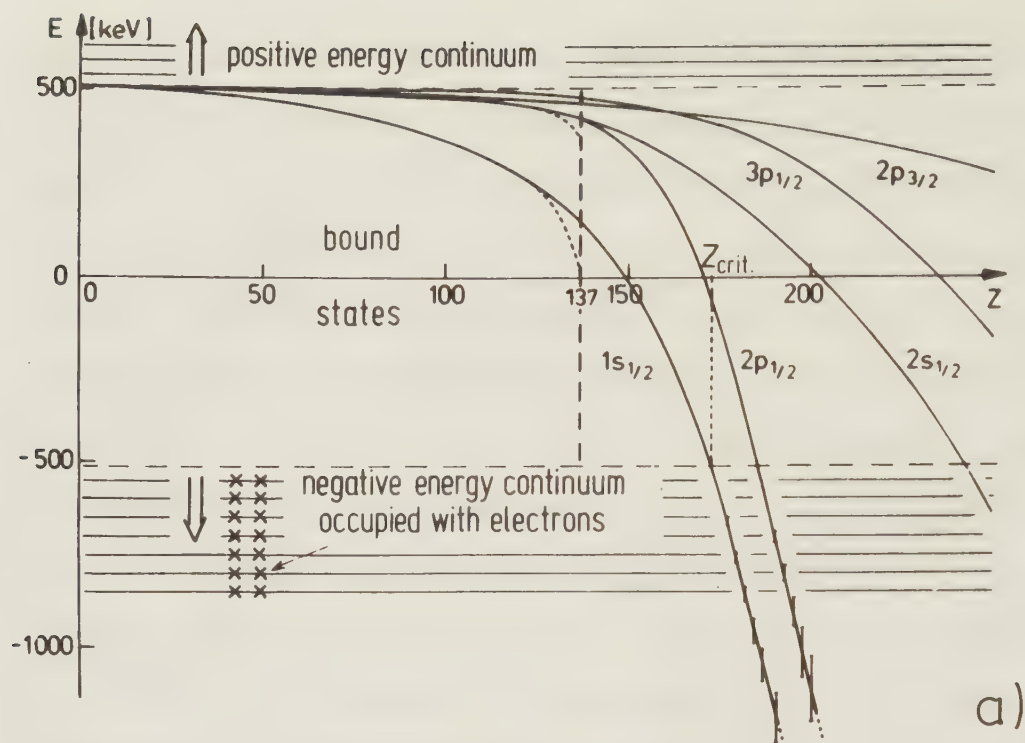


Fig.1

einer natürlich bevorzugten Eichung für das adiabatische System definiert wird. In diesem Sinne spricht man vom überkritischen Vakuum während des Schwerionenstoßes. Da die Geschwindigkeit der Elektronen in den inneren Atomorbitalen der schweren Ionen größer ist als die der relativen Kernbewegungen, bilden sich atomartige Quasimoleküle während des Stoßes aus. Diese wurden bereits experimentell durch die Messung charakteristischer, molekularer Röntgenspektren [8,10] nachgewiesen. Fig 1 b zeigt schematisch die elektronischen Energieeigenwerte für das überkritische adiabatische Zwei-Zentren - Coulombproblem als Funktion der Stoßzeit ($Z_{\text{total}} > Z_{\text{cr}}$). Die Pfeile bezeichnen die verschiedenen Prozesse, die mit dem starken Feldcharakter des stoßenden Systems verknüpft sind: a, b beschreibt elektronische Anregung und Ionisation, c die spontane Bildung von Positronen, d, e beschreiben den induzierten Zerfall des Vakuums und f bezeichnet die direkte Paarerzeugung aufgrund hoher Fourierfrequenzen, welche im System enthalten sind. Erst kürzlich ausgeführte Messungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes $\frac{d\sigma^{e^+}}{dE_p}$ für Positron Emission in Pb - Pb und Pb - U Stößen zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie, nachdem Hintergrundeffekte mit in Betracht gezogen werden. [7,9,11]

Obwohl man zeigen kann, daß die adiabatischen Zustände eine gute Basis bilden für die dynamische Beschreibung des Schwerionenstoßes im Rahmen einer Vielkanaltheorie, ist die physikalische Relevanz dieser Zustände und damit auch die Begriffsbildung des überkritischen Vakuums im hochdynamischen Stoß

noch unklar. Dieses Problem würde jedoch umgangen werden, sonderte man tiefinelastische Reaktionen aus den Stoßprozessen aus, wo die Kerne während einer relativ langen Zeit zusammenkleben.^[12,13] In einer solchen Reaktion würde die Rate der erzeugten überkritischen Positronen verstärkt und der Zerfall des neutralen Elektron - Positron - Vakuums könnte anhand einer scharfen Positronenlinie nachgewiesen werden.

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob außer der elektrostatischen Instabilität des Dirac - Vakuums noch weitere Instabilitäten ähnlicher Art in der Natur auftreten, und wie bzw. ob diese Instabilitäten experimentell untersucht werden können. Dies ist hauptsächlich der Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Obwohl sich einige Instabilitäten des Dirac - Vakuums mit Hilfe von Energieniveauschemen als Lösungen klassischer Gleichungen erkennbar machen, so sind sie letztlich doch quantenfeldtheoretische Phänomene und sollten als solche beschreibbar sein. Dazu jedoch benötigt man eine manifest (eich) - kovariante Quantenfeldtheorie des Dirac Feldes bei Anwesenheit äußerer, klassischer Eichfelder, welche die Möglichkeit der Teilchenerzeugung einschließt. Eine solche Theorie wurde 1975 von H. Rumpf eingeführt^[1,14-16] und wir werden diese später kurz diskutieren.

Die Beschreibung von Paarbildung durch äußere Felder wird im Rahmen jener Theorie dadurch möglich, daß man vier (statt

zwei) Klassen von Moden des Feldes definiert. (Ein- und auslaufende Teilchen - (Antiteilchen) moden) Es zeigt sich, daß sogar bei Anwesenheit äußerer generischer Eichfelder (d.h. solche, die weder ein - noch abgeschaltet werden, wie man es in der Standardquantenfeldtheorie stets annimmt) die Theorie sinnvolle Resultate liefert. Die ein- bzw. auslaufenden Moden entsprechen hierbei in vielen Beispielen in den jeweiligen asymptotischen Bereichen ($t \rightarrow \pm \infty$) den WKB - Lösungen der quasiklassischen Theorie. Eine auf WKB - Lösungen basierende Konstruktion einer Quantenfeldtheorie bei Anwesenheit äußerer Felder wurde bereits 1970 von Nikishov für elektromagnetische Systeme verwendet und fand in der letzten Zeit verstärkt Anwendung bei der Berechnung von Teilchenerzeugung im expandierenden Universum. Wir werden an einigen Stellen die Theorie von Rumpf heranziehen, um über die Stabilität des Dirac - Vakuums in äußeren Feldern zu entscheiden. Es sei jedoch bemerkt, daß die Rumpf'sche Theorie in solchen Situationen versagt, wo ein neuer stabiler Grundzustand des Dirac - Systems im überkritischen Fall auftritt. In einem solchen Falle begnügen wir uns mit der Diskussion von Energieniveaudiagrammen oder mit einer statistischen Beschreibung des überkritischen Vakuums, wie sie von Rafelski und Müller für das stark überkritisch geladene Vakuum in der QED vorgeschlagene wurde.

Die Möglichkeit, beliebige Koordinatensysteme zur Beschreibung physikalischer Phänomene zuzulassen, führt zu weiteren Problemen, die mit der Stabilität des Dirac - Vakuums ver-

knüpft sind.^[23] So sollte etwa ein gleichförmig beschleunigter Detektor Teilchen messen, selbst wenn das System sich im Minkowski - Vakuum befindet.^[24-26] (Dieses Resultat wurde von Fulling, Unruh, Rumpf u.a. für Bosonen gefunden.) D.h der Fock - Raum derjenigen Zustände, die ein Detektor mißt, sollte vom Koordinatensystem und der dadurch beschriebenen Submannigfaltigkeit M' der vollen Raum - Zeit M abhängen. Man hat so das scheinbar paradoxe Resultat, daß zwar der gravitierende Anteil der Materie (Ströme) in Form eines Energieimpulstensors $T_{\mu\nu}$ oder ein entsprechend regularisierter Erwartungswert des Energieimpulsoperators $\langle |\hat{T}_{\mu\nu}| \rangle_{reg}$ unabhängig vom Koordinatensystem beschreibbar ist (andernfalls hätte die Einstein'sche Gleichung keinen Sinn), daß aber in den Nachweis von Feldquanten die Trajektorie des Detektors eingeht. Dieses Verhalten werden wir am Beispiel der Quantenfeldtheorie von Fermionen im Rindler Raum diskutieren. Es stellt sich heraus, daß der mit einer gleichförmigen Beschleunigung g bewegte Beobachter thermisch verteilte Teilchen einer Temperatur $T = \frac{g\hbar}{2\pi c\kappa}$ im Minkowski - Vakuum mißt. Das Ergebnis hängt nun entscheidend von der Tatsache ab, daß der gleichförmig beschleunigte Beobachter im Minkowski - Raum einen Ereignishorizont besitzt: Es gibt Teile der Minkowski - Raumzeit mit denen er nicht kommunizieren kann. So kann die globale geometrische und topologische Struktur derjenigen Submannigfaltigkeit, die mit dem Beobachter verknüpft ist, für das Auftreten dieser Temperatur verantwortlich gemacht werden. Auf neuere Arbeiten, welche das Auftreten einer solchen Temperatur mit topologischen Invarianten bzw. einer geometri-

schen Größe, der differentiellen Windungszahl der Beobachtermannigfaltigkeit in Beziehung setzen, werden wir kurz eingehen.

Wir wollen diesen Aspekt, die globale Natur gewisser physikalischer Phänomene, anhand des elektromagnetischen Feldes von Punktladungen weiter diskutieren.

In diesem Abschnitt spielt es keine Rolle, ob die Träger der Ladungen Bosonen oder Fermionen sind; sie sollen hierbei lediglich als klassische Quellen des elektromagnetischen Feldes dienen. Sowohl das Mach'sche Prinzip als auch das Äquivalenzprinzip wird bei dieser Diskussion eine Rolle spielen.

Spätestens mit dem Erfolg der Weinberg - Salam Theorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung (etwa durch den Nachweis schwacher Wechselwirkung, welche durch die Vermittlung neutraler Ströme zustande kommt) und der Entdeckung des Higgs - Kibble - Brout Mechanismus der spontanen Brechung der Eichsymmetrie gerieten Eichtheorien über nicht abelschen Liegruppen in das Zentrum des allgemeinen Interesses.

So sollte etwa die starke Wechselwirkung durch Austausch von Gluonen, Eichfelder der Gruppe $SU_c(3)$ im Rahmen einer Quantenchromodynamik beschrieben werden können. Wir können daher fragen, ob das Auftreten nicht abelscher Eichfelder zu neuen Vakuumstrukturen führt. So stellt sich z.B. heraus ^[27-30], daß die euklidische Wirkungsfunktion reiner Yang - Mills Felder (Eichfelder der Gruppe $SU_{(n)}$) abzählbar viele Minima besitzt

(Instantonen) und das Young - Mills Feld selbst eine reiche Vakuumstruktur besitzt.

Versucht man klassische Yang - Mills Felder für klassische Yang - Mills Quellen zu konstruieren^[31,32], so erhält man in einem sehr allgemeinen Fall einen Satz entkoppelter Coulomb-potentiale für Ladungen verschiedener (kommutierender) Richtungen im Yang - Mills Raum.

Das Stabilitätsproblem des Dirac - Vakuums im äußeren Yang-Mills Feld (also z.B. des Quark - Vakuums im vorgegebenen Farbfeld) reduziert sich hierbei auf das Stabilitätsproblem der Quantenelektrodynamik.

Es stellt sich in diesem Beispiel aber außerdem das Stabilitätsproblem des Gluonenfeldes selbst. Für ein Coulombfeld läßt sich dieses auf das Stabilitätsproblem der masselosen Proca - Gleichung im äußeren Coulombfeld zurückführen, welches wiederum große Ähnlichkeit mit der Klein - Gordon Gleichung besitzt. Es treten aber auch magnetische Instabilitäten auf, die mit dem hohen farbmagnetischen Moment der Gluonen verknüpft sind.

Das bisher Gesagte zeigt auf, wie sich die vorliegende Arbeit in das bisher publizierte Material einordnet. Zur besseren Übersicht stelle ich in folgendem noch einmal die in dieser Arbeit neu behandelten Punkte zusammen:

1. Die Stabilität des Dirac - Vakuums in beliebigen stationären Magnetfeldern (d.h. bei beliebigen zeitunabhängigen Vektorpotentialen) wird gezeigt.
2. Auf ähnliche Art und Weise wird gezeigt, daß ein global statisches äußeres Gravitationsfeld (ohne Torsion) unter allgemeinen Annahmen spontan keine

Paare zu bilden vermag. (Dies ist im wesentlichen eine Folge des Äquivalenzprinzips: Teilchen und Antiteilchen gravitieren gleichermaßen.) Paare werden nur gebildet falls die Raum - Zeit dynamisch ist, also etwa einen Ereignishorizont aufweist.

- a. Es wird gezeigt, daß in nichtrelativistischer Näherung das Newtonsche Potential skalar in die Dirac - Gleichung koppelt. (Die Dirac - Gleichung ist bekanntlich stabil im skalar eingekoppelten $1/r$ Potential.)
3. Es wird ein Modell konstruiert, um den Zerfall des Dirac - Vakuums in einem äußeren Torsionsfeld klar zu demonstrieren. Dies führt zum neuartigen ferromagnetischen Vakuum (Vakuum mit Spin), welches selbstkonsistent im Rahmen eines Thomas - Fermi - Modelles behandelt wird.
4. Die Dirac - Gleichung im Rindler - Raum wird ausführlich diskutiert und erstmals global gelöst. Dies ist vom mathematischen Standpunkt aus von Bedeutung, denn: die bisher einzig betrachteten Bosonenmoden transformieren sich skalar vom Minkowski Raum auf den beschleunigten Rindler - Raum. Von Fermionenmoden dagegen weiß man nur, wie sie sich unter Poincaré - Transformationen verhalten. Spinoren sind keine Darstellungen der allgemeinen Gruppe der Koordinatentransformationen. Womöglich aus diesem Grunde wurden Fermionen nicht in

in beschleunigten Bezugssystemen diskutiert.

Eine auf klassischen Diracmoden aufgebaute Quantenfeldtheorie zeigt, daß ein gleichförmig beschleunigter Beobachter thermisch verteilte Fermionen mißt, wenn das System sich im Minkowski - Vakuum befindet. Dieses thermische Verhalten mit Fermionencharakter läßt sich bereits den klassischen Moden im Rindler - Raum ansehen, so daß man diese Betrachtung als einen neuen, rein klassischen Beweis des Spin - Statistik Theorems ansehen kann.

5. Seit Anfang dieses Jahrhunderts streiten sich Autoren darum, ob eine gleichförmig beschleunigte Punktladung im Minkowski-Raum strahlt oder nicht. Es existieren Rechnungen, die zeigen, daß eine derart bewegte Punktladung gemäß der Larmorschen Formel strahlen sollte. Ferner solche, die zeigen, daß man in einem mitbewegten Koordinatensystem nur ein statisches Coulombpotential erhält. Um diese Frage einer Entscheidung zuzuführen, wurde das Strahlungsfeld $A^{\mu(out)}$ der Punktladung erstmalig berechnet. Es zeigt sich, daß dieses gerade in demjenigen Gebiet des Minkowski-Raumes verschwindet, der von den Rindler - Koordinaten überdeckt wird, aber nicht im vollen Minkowski-Raum. Das erwähnte Dilemma löst sich damit auf: die Ladung strahlt, die Strahlung ist aber auf das dem mitbewegten Beobachter unzugängliche Gebiet beschränkt.

II Die freie Dirac'sche Wirkungsfunktion

Wir gehen aus vom freien quantisierten Dirac Feld ψ im Minkowski Raum. Die Signatur des metrischen Tensors sei (+---) außer im Abschnitt über den euklidischen Minkowski Raum, so daß gilt: *)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -1, -1) \quad (2.1)$$

Die freie Dirac'sche Wirkungsfunktion lautet dann etwa in kartesischen Koordinaten:

$$I[\psi] = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (i \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - i \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \gamma^{\mu} \psi - 2m \bar{\psi} \psi) dx^0 \quad (2.2)$$

Hier ist $\bar{\psi}$ der zu ψ adjungierte Bispinor. ($\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma_0$)

Die Variation von $I[\psi]$ nach $\bar{\psi}$ bzw. ψ führt bekannterweise auf die Dirac bzw. adjungierte Dirac Gleichung:

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi = 0 \quad (a) \quad (-i \partial_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \bar{\psi} = 0 \quad (b) \quad (2.3)$$

Das Anfangswertproblem der Dirac Gleichung (2.3 a) läßt sich dann so darstellen:

$$\psi(x) = i \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu}(x') S(x, x') \gamma_{\mu} \psi(x') \equiv - (S * \psi)_{\Sigma}(x) \quad (2.4)$$

*) Im Allgemeinen setzen wir $\hbar = c = 1$

(Lies: "S propagiert Ψ auf Σ zum Punkte x ")

Hier ist Σ eine raumartige Hyperfläche, $x' \in \Sigma$ und $d\sigma^\mu$ die auf Σ stehende orientierte Normale. $S(x, x')$ ist der Cauchy Propagator des Dirac Feldes welches gemäß:

$$\{\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x')\} = i S_{\alpha\beta}(x, x') \quad (2.5)$$

quantisiert sein möge. (Da $\Psi(x)$ in (2.4) bzw. S im Argument x die Dirac Gleichung (2.3) erfüllt, ist S nicht zu wechseln mit dem Feynman - Propagator!)

Die Hyperfläche Σ wählt man als Fläche $t = \text{const.}$ wenn möglich. Dann ist einfach $\int_{\Sigma} d\sigma^\mu(x') = \int_V d^3x'$ und $d\sigma^\mu = (d^3x, 0, 0, 0)$.

Seien x und x' raumartig voneinander getrennt. Mit einer geeigneten Wahl einer Zeitachse mögen also x und x' auf einer Hyperfläche $t = \text{const.}$ liegen. (2.5) geht dann in den Antikommutator zu gleichen Zeiten über:

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(x')\gamma_\mu\} = i \gamma_\mu(x-x') \quad (2.5a)$$

bzw.

$$\{\Psi(x), \pi_\mu(x')\} = -i \gamma_\mu(x-x') \quad (2.5b)$$

wo $\pi_\mu = -\bar{\Psi}\gamma_\mu$ der zu Ψ kanonisch konjugierte Spinor ist.

Mit Hilfe von (2.4) kann man dann (2.5) aus (2.5a) zurückgewinnen. (Vgl. etwa Jauch, Rohrlich, Ref. 129)

Das positiv definite Dirac'sche Skalarprodukt (Ψ_1, Ψ_2) ist über

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu} \bar{\psi}_1 \gamma^{\mu} \psi_2 \quad (2.6)$$

definiert und wegen der Stromerhaltung:

$$\int_{,\mu}^{\mu} = 0 \quad ; \quad \int^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \quad (2.7)$$

von der Hyperfläche Σ unabhängig.

Mit Σ als Fläche $t = \text{const.}$ lautet (2.6) einfach:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_V d^3x \psi_1^{\dagger} \psi_2 \quad (2.6a)$$

Betrachtet man Fermionen in einem äußeren Feld A , so leitet man die Art der Ankopplung des Feldes A in $I[\psi]$ üblicherweise aus Symmetrieüberlegungen ab. Wir machen uns dies in den folgenden Abschnitten klar.

III Die Wirkungskfunktion und Eichtheorien über Lie - Gruppen

Obwohl die allgemeine Eichtheorie über Lie - Gruppen in diversen Veröffentlichungen diskutiert wird^[37, 38], erscheint es uns dennoch nützlich zu sein, jene kurz zu skizzieren. (Wir halten uns hierbei an eine Arbeit von Utiyama.^[37])

Sei $\{\psi^A_{(x)}\}$ ($A=1, \dots, N$) eine Menge von N (Dirac) Feldern.

$I[\psi^A] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi^A, \partial_{\mu} \psi^A) d^4x$ sei invariant unter der Wirkung einer n - parametrigen Lie - Gruppe G , d.h. $I[\psi^A]$ sei invariant unter der Abbildung:

$$\psi^A \rightarrow \psi^A + \delta \psi^A \quad \delta \psi^A = T_a^A{}_B \epsilon^a \psi^B \quad (3.1)$$

Hier sind $T_a^A{}_B$ eine Darstellung der Generatoren von G (üblicherweise Matrizen) und ϵ^a ($a = 1, \dots, n$) sind n infinitesimale ortsunabhängige Parameter.

Ω sei das Raum - Zeitgebiet zwischen zwei raumartigen Hyperflächen Σ_1 ($t = t_1$) und Σ_2 ($t = t_2$).

Die Generatoren von G erfüllen die Lie - Algebra:

$$[T_a, T_b]^A{}_B = f_{ab}^c T_c^A{}_B \quad (3.2)$$

Die f_{ab}^c sind die Strukturkonstanten der durch G erzeugten Lie - Algebra und es gilt:

$$(i) \quad f_a^m{}_b f_m^l{}_c + f_b^m{}_c f_m^l{}_a + f_c^m{}_a f_m^l{}_b = 0$$

$$(ii) \quad f_a^c{}_b = - f_b^c{}_a \quad (3.3)$$

was aus der Jacobi Identität der Lie - Algebra folgt. Da i.a. die oben genannte Invarianzeigenschaft unabhängig von Ω gilt, so ist diese auch für die Lagrangefunktion gültig:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A{}_{,\mu}} \delta \psi^A{}_{,\mu} = 0 \quad (3.4a)$$

bzw.

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} T_a^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A{}_{,\mu}} T_a^A{}_B \psi^B{}_{,\mu} \right) \epsilon^a = 0$$

(3.4b)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} T_a^A{}_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A{}_{,\mu}} T_a^A{}_B \psi^B{}_{,\mu} = 0 \quad (a = 1, \dots, n)$$

da die Größen ϵ^a unabhängig voneinander sind. Gemäß des Theorems von Noether ergeben sich daraus n - verschiedene erhaltene Ströme:

$$j_a^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad ; \quad j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^A} T_a^A{}_B \psi^B \quad (a = 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

Wir betrachten jetzt den Übergang $G \rightarrow G_x$, d.h. wir lassen die Parameter ϵ^a ($a = 1, \dots, n$) von x abhängig sein, d.h.

$$\delta \psi^A(x) = T_a^A{}_B \epsilon^a(x) \psi^B \quad (3.6)$$

$\mathcal{L}$ ist nun nicht länger invariant sondern:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}^A} T_a^A{}_B \psi^B \frac{\partial \epsilon^a}{\partial x^\mu} = \epsilon^a{}_{,\mu} j_a^\mu \quad (3.7)$$

Die Invarianz von $\mathcal{L}$ bzw. $I[\Psi]$ kann man jedoch durch das Einführen von Eichfeldern $A_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, n$) wieder herstellen, wenn die A_μ^a 's sich unter der Eichtransformation gemäß

$$\delta A_\mu^a = f_b^a{}_c A_\mu^c \epsilon^b + \epsilon^a{}_{,\mu} \quad (3.8)$$

transformieren.

$\mathcal{L}$ bzw. $I[\Psi]$ ist dann invariant falls man von der partiellen Ableitung ∂_μ übergeht zur kovarianten Ableitung ∇_μ :

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A - T_a^A{}_B A_\mu^a \psi^B \quad (3.9)$$

Wir wollen die Eichvarianz kurz aufzeigen. Wir unterdrücken dazu einfach die Indizes A und B und schreiben für (3.6) etwa:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U(\epsilon(x)) \Psi = (1 + T_a \epsilon^a) \Psi$$

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow U \Psi_{,\mu} + U_{,\mu} \Psi$$

Die Eichvarianz ist dann gesichert, wenn die kovariante Ableitung $\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - T_a A_\mu^a \Psi$ sich bei einer Eichtransformation folgendermaßen transformiert:

$$\nabla_\mu \Psi \rightarrow \nabla'_\mu \Psi' = U \nabla_\mu \Psi$$

Diese Bedingung ergibt das Transformationsgesetz für die Eichfelder $A_\mu^a : A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu$

$$\begin{aligned} \nabla'_\mu \Psi' &= \Psi'_{,\mu} - T_a A'^a_\mu \Psi' \\ &= U_{,\mu} \Psi + U \Psi_{,\mu} - T_a A'^a_\mu U \Psi \\ &\stackrel{!}{=} U (\partial_\mu - T_a A_\mu^a) \Psi \end{aligned}$$

Also:

$$T_a A'^a_\mu U \Psi = U T_a A_\mu^a \Psi + U_{,\mu} \Psi$$

$$A'^a_\mu T_a = U A_\mu^a T_a U^{-1} + U_{,\mu} U^{-1}$$

Mit

$$U = 1 + \epsilon^a T_a, \quad U^{-1} = 1 - \epsilon^a T_a, \quad A'^a_\mu = A_\mu^a + \delta A_\mu^a$$

folgt dann

$$\delta A_\mu^a T_a = \epsilon_\mu^a T_a + \epsilon^b A_\mu^a [T_b, T_a]$$

und wegen der Unabhängigkeit der T_a folgt damit das Transformationsgesetz (3.9) für die Eichfelder A_μ^a .

Zur Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\Psi^A, \nabla_\mu \Psi^A)$ addiert man noch den kinetischen Anteil $\mathcal{L}_{\text{frei}}(A_\mu^a, \partial_\nu A_\mu^a)$ der Eichfelder, um die totale Lagrangefunktion des Systems zu erhalten. Wegen der Transformation von A_μ^a (3.8) können Ableitungen von A_μ^a nur in der Form

$$F_{\mu\nu}^a = A_{\nu/\mu}^a - A_{\mu/\nu}^a + [A_\nu, A_\mu]^a$$

$$[A_\nu, A_\mu]^a = \frac{1}{2} f_b^a c (A_\nu^b A_\mu^c - A_\mu^b A_\nu^c) \quad (3.10)$$

auftreten.

Für $F_{\mu\nu}^a$ gilt:

$$i) \quad F_{\mu\nu/\rho}^a + F_{\nu/\rho\mu}^a + F_{\rho\mu/\nu}^a = 0$$

$$ii) \quad F_{\mu\nu}^a = - F_{\nu\mu}^a \quad (3.11)$$

Wegen der Renormierbarkeitsforderung an die QFT betrachtet man üblicherweise $\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ (3.12)

und hat

$$\mathcal{L}_{\text{Total}} = \mathcal{L}(\Psi, \nabla \Psi) + \mathcal{L}_{\text{frei}}(F) \quad (3.13)$$

was das System wechselwirkender Fermionen beschreibt. Eine Ausnahme bildet hierbei die Eichtheorie der Gravitation.

An die Stelle eines Tensors zweiter Stufe ($F^a_{\mu\nu}$) tritt hier der Krümmungstensor $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$, welcher von vierter Stufe ist. Bei einem solchen Tensor, welcher antisymmetrisch jeweils im vorderen und hinteren Indexpaar ist, wird es möglich, durch reine Kontraktion eine nichtverschwindende skalare Invariante zu konstruieren, welche für die Konstruktion von $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ verwendet werden kann (vgl. Kap. V).

Daß das Gravitationsfeld im Vergleich zum EM - Feld durch ein Objekt mit mehr Tensorindizes beschrieben wird, ist schon aus einem Vergleich der jeweiligen klassischen Bewegungsgleichungen für Probekörper zu erkennen.

Anstelle der Lorentz Gleichung

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = e F^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{ds} \quad (3.14)$$

für das Verhalten von Probeladungen im EM - Feld ergibt sich die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \quad (3.15)$$

als Bewegungsgleichung von Testmassen im Schwerfeld. Bei Yang - Mills Feldern trägt der Feldstärketensor $F^a_{\mu\nu}$ noch einen Yang - Mills Index (der Index a aus Gl. (3.1), welcher die Generatoren der Lie - Gruppe durchnumeriert), welcher aber nicht mit einem Tensorindex kontrahiert werden kann.

Über die Bewegungsgleichung erhält man wieder n - erhaltene Ströme:

$$J_{a,\mu}^\mu = 0 \quad ; \quad J_a^\mu = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu \psi^A} T_a^A{}^B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{frei}}}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_a^b{}_c A_\nu^c \right) \quad (3.16)$$

$$(a = 1, \dots, n)$$

In den nächsten vier Abschnitten werden wir die uns im weiteren interessierenden Wechselwirkungen betrachten:

Die elektromagnetische Wechselwirkung als Eichtheorie der $U(1)$, (QED), die Gravitationswechselwirkung als Eichtheorie der Poincaré Gruppe $\mathcal{P}$ und die schwache (bzw. starke) Wechselwirkung als Eichtheorie der $SU(n)$.

IV Eichtheorie der Gruppe $U(1)$ - Quantenelektrodynamik

Die Gruppe $U(1)$ ist eine stetige, einparametrige kompakte abelsche Lie - Gruppe, d.h. die Strukturkonstanten $f_a^b{}_c$ verschwinden. Es gilt dann

$$\psi \rightarrow \psi + \delta\psi \quad \delta\psi = ie\chi\psi \quad (4.1)$$

mit einer konstanten Phase χ . Die Abbildung (4.1) lautet im endlichen Fall

$$\psi \rightarrow e^{ie\chi} \psi \quad (4.2)$$

was die Transformationsgruppe $U(1)$ zu erkennen gibt. Betrachtet man $U(1) \rightarrow U_x(1)$, d.h. $\chi \rightarrow \chi(x)$, so bleibt $I[\psi]$ invariant bei Einführung des (elektromagnetischen) 4 - er Potentials A^μ mit:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu + ie \chi_{,\mu} \quad (4.3)$$

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + ie A_\mu) \psi \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (4.5)$$

Diese Bedingungen charakterisieren dann die Quantenelektrodynamik.

V Eichtheorie der Poincaré - Gruppe (Einstein - Cartan - Theorie)

$I[\psi]$ ist invariant unter Poincaré Transformationen $\overline{\Pi}$:

$$\psi(x) \rightarrow [\overline{\Pi} \psi](x) = (1 + a^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} - a^\gamma \partial_\gamma) \psi(x) \quad (5.1)$$

Hierbei sind $I_{\alpha\beta}$ und ∂_γ die Generatoren der Lorentzgruppe bzw. der raumzeitlichen Translationen, $a^{\alpha\beta}$ und a^γ sind die infinitesimalen Parameter einer Poincaré Transformation $\overline{\Pi}$, d.h.

$$x^\mu \xrightarrow{\overline{\Pi}} x'^\mu = x^\mu + a^\mu_\nu x^\nu + a^{\mu\alpha} I_{\alpha\beta} x^\beta \quad (5.2)$$

Die Transformationen $\overline{\Pi}$ bilden die Poincaré - Gruppe $\mathcal{P}$.

Sie ist diejenige Gruppe, welche das Minkowski Längenelement $ds^2 = dt^2 - \sum_{a=1}^3 dx^a dx^a$ invariant läßt. Die Lie - Gruppenstruktur von $\mathcal{P}$ sieht so aus:

$$[I_{\alpha\beta}, I_{\gamma\delta}] = g_{\gamma[\alpha} I_{\beta]\delta} - g_{\delta[\alpha} I_{\beta]\gamma} \quad (5.3a)$$

$$[I_{\alpha\beta}, \partial_\gamma] = g_{\gamma[\alpha} \partial_{\beta]} \quad (5.3b)$$

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0 \quad (5.3c)$$

Hier ist die Klammer $[\]$ die sogenannte Bach - Klammer. Sie bedeutet das vollständige Antisymmetrisieren der in der Klammer stehenden Indizes.

Für Fermionenfelder ist $I_{\alpha\beta} = \frac{1}{8} [\delta_\beta, \delta_\alpha]$.

Die Eichinvarianz unter Π_x gewährleistet man durch Einführen von

$$i) \quad \Gamma_\mu^{ab}(x) = \Gamma_\mu^{[ab]}(x) \quad (\text{Invarianz unter der lokalen Lorentz - Gruppe } L_x) \quad (5.4a)$$

$$ii) \quad e_\mu^a(x) \quad (\text{Invarianz unter der lokalen Translationsgruppe } T_x) \quad (5.4b)$$

d.h. Γ_μ^{ab} sind Eichfelder der "Rotation", e_μ^a solche der "Translation". Hierbei beziehen sich lateinische Indizes auf lokale Minkowski Koordinaten (anholonome Koordinaten) und mit griechischen Indizes bezeichnen wir wie üblich holonome Koordinaten, die sich auf ein beliebiges Koordinaten-

system beziehen.

Um einen Spinor beschreiben zu können, benötigt man in jedem Raum - Zeitpunkt ein Vierbein (Tetrade) von Basisvektoren, auf welches wir den Spinor beziehen.

Anholonome Koordinaten beziehen sich auf solche Tetraden.

Nur wenn man die Tetraden in benachbarten Raum - Zeitpunkten geeignet wählen kann, kann man die Spinorkoordinaten differenzieren und von holonomen Koordinaten sprechen.

Es stellt sich heraus, daß man durch den Übergang $\Pi \rightarrow \Pi_x$ eine globale U_4 - Geometrie definiert. In einer solchen Geometrie spielen folgende Größen, bzw. Relationen eine Rolle:

1. eine affine Übertragung Γ mit einer dazugehörigen Γ - kovarianten Ableitung

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu = \partial_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathbb{I}_\lambda^\nu \quad (5.5a)$$

2. ein metrischer Tensor g

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab} \quad (5.5b)$$

3. wegen der Antisymmetrie der Γ_{μ}^{ab} in ab folgt

$$\overset{\Gamma}{\nabla}_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \quad (\text{lokale Minkowski - Struktur}) \quad (5.5c)$$

4. ein Torsionstensor S

$$S_{\mu\nu}^a = D_{[\mu} e_{\nu]}^a$$

$$\text{mit } D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu^{ab}(x) I_{ba} \quad (5.5d)$$

5. ein Krümmungstensor R

$$R_{\mu\nu}^{ab} = 2(\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]}^{ab} + \Gamma_{[\mu}^{ca} \Gamma_{\nu]}^{db} \eta_{cd}) \quad (5.5e)$$

Analog zu Relationen (3.11) gilt

$$R^a{}_{b\mu\nu;\rho} + R^a{}_{b\nu\rho;\mu} + R^a{}_{b\rho\mu;\nu} = 0 \quad (5.6a)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} \quad (5.6b)$$

So führen die Eichfelder der "Rotation" dazu, einen Krümmungstensor einzuführen, die Eichfelder der Translation bewirken das Auftreten eines Torsionstensors. Die Einführung der Eichfelder der Poincare - Gruppe induzieren eine globale U_4 - Geometrie mit lokaler Minkowski Struktur. Fügt man noch den einfachsten eichinvarianten kinetischen Ausdruck für die Eichfelder zu $\mathcal{L}(\psi, \vec{\nabla}_\mu \psi)$, so erhält man für gravitativ wechselwirkende Fermionen:

$$\mathcal{L}_{\text{Total}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[i \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\nabla}_\mu \psi - i \bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \psi - 2m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{\kappa} R \right] \quad (5.7)$$

Hierbei ist R der Krümmungsskalar der U_4 - Geometrie, $R = R^\mu{}_\mu$, $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\rho\mu\nu}$, κ ist die Gravitationskonstante der Gravitation. Die generalisierten Dirac Matrizen $\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$ sind jetzt abhängig von x und genügen der Clifford - Algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \quad (5.8)$$

∇_μ ist die kovariante Ableitung eines Bispinors :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi &= (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi & \bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu &= \partial_\mu \bar{\psi} - \bar{\psi} \overleftarrow{\Gamma}_\mu \\ \Gamma_\mu &= \frac{1}{8} \Gamma_{\mu ba} [\gamma^a, \gamma^b] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wie wir bereits bemerkten, hat der kinetische Anteil des Gravitationsfeldes nicht die übliche Struktur $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ sondern wird durch Kontraktion aus dem Krümmungstensor vierter Stufe gewonnen. Variation des totalen Wirkungsintegrals nach den Eichfeldern führt dann auf die Gleichungen

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (5.10)$$

$$T^{\mu\nu\lambda} = -\kappa \tau^{\mu\nu\lambda} \quad (5.11)$$

Hierbei ist $T^{\mu\nu}$ der totale Energieimpulstensor der Materie. Sei

$$T_{kan}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}(\psi, \nabla \psi)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu|\lambda}} \right) \quad (5.12)$$

der kanonische Energieimpulstensor des Dirac - Feldes,

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta S_{\lambda\nu}{}^\mu} \quad (5.13)$$

der kanonische Spin - Energietensor des Dirac - Feldes, so

ergibt sich:

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{kan}}^{\mu\nu} - (\nabla_\lambda + 2 S_{\lambda\nu}{}^\nu) \varphi^{\mu\nu\lambda} \quad (5.14)$$

$\varphi^{\mu\nu\lambda}$ ist der kanonische Spintensor der Dirac - Materie

$$\varphi^{\mu\nu\lambda} = \varphi^{[\nu\mu]\lambda} \quad (5.15)$$

und schließlich ist $T_{\mu\nu}{}^\lambda$ der sogenannte modifizierte Torsionstensor:

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = S_{\mu\nu}{}^\lambda + 2 \delta^\lambda_{[\mu} S_{\nu]\tau}{}^\tau \quad (5.16)$$

Gleichung (5.10) ist eine verallgemeinerte Einstein Gleichung. Bei Verschwinden des Torsionsfeldes S geht diese Gleichung in die übliche Einstein Gleichung über. Die zweite Bewegungsgleichung (5.11) beschreibt den Zusammenhang zwischen Spingehalt der Materie und Torsion der U_4 - Geometrie. Diese Gleichung ist rein algebraisch, d.h.

$\mathcal{L}_{\text{Total}}$ aus (5.7) führt zu einer Kontaktwechselwirkung des Spins mit der Geometrie. Torsion des Raumes tritt nur dort auf, wo sich eine Spinverteilung angesammelt hat.

Unter Einstein - Cartan - Theorie wollen wir im weiteren die Theorie der Gleichungen (5.10) und (5.11) verstehen. Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, daß im

Riemann'schen Raum ($S = 0$) die Eichfelder der Rotation $\Gamma_{\mu}{}^{ab}$ eindeutig durch die Eichfelder der Translation bzw. den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmt werden. Für $S = 0$ ist dann:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{\begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\mu\nu} + g_{\sigma\nu\mu} - g_{\mu\nu\sigma}) \quad (5.17)$$

(Christoffel - Symbole)

VI SU (2) Yang - Mills - Felder

Wir können mehrere Bispinoren Ψ zu einem Isomultipllett Ψ^{α} ($\alpha = 1, \dots, m$) zusammenfassen. Für $m = 2$ ist die Duplett-darstellung einfach durch das Isospindublett gegeben:

$$\Psi^{\alpha} = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{proton} \\ \text{neutron} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$I[\Psi^{\alpha}]$ erhält man aus $I[\Psi]$ (2.2) durch $\Psi \rightarrow \Psi^{\alpha}$, $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}^{\alpha}$ und Summation über α . $I[\Psi^{\alpha}]$ ist dann invariant unter

$$\Psi^{\alpha} \rightarrow \Psi^{\alpha} + \delta \Psi^{\alpha} \quad \delta \Psi^{\alpha} = i g \sum_{c=1}^3 \epsilon^c \tau_{(c)}^{\alpha\beta} \Psi^{\beta} \quad (6.2)$$

($\alpha, \beta = 1, 2$)

ϵ^c sind wieder die infinitesimalen Parameter aus Gleichung (3.1).

$\tau(1)$, $\tau(2)$, $\tau(3)$ sind die üblichen Isospinmatrizen

$$\tau(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

mit

$$[\tau(j), \tau(k)] = 2i \epsilon_{jke} \tau(e) \quad (6.4)$$

$$\{\tau(j), \tau(k)\} = 2 g_{jk} \mathbb{1} \quad (6.5)$$

Für endliche Transformationen erhält man $\psi^\alpha \rightarrow e^{i\epsilon^c \tau(c)^\alpha_\beta} \psi^\beta$
 d.h. der (endliche) Transformationsoperator ist von der Ge-
 stalt $e^{i\theta\tau} = U$. Für U gilt: i) $U = U^{-1}$ ii) $\det U = +1$
 d.h. $U \in SU(2)$.

Allgemein ist $SU(n)$ eine stetige, $(n^2 - 1)$ parametrische,
 zusammenhängende kompakte Lie - Gruppe.

Läßt man ϵ^c ortsabhängig werden ($SU(2) \rightarrow SU_x(2)$), so
 bleibt $I[\psi^\alpha]$ invariant, wenn man die Yang - Mills - Felder

$A_\mu^c(x)$ ($c = 1, 2, 3$) einführt mit

$$\partial_\mu \psi^\alpha \rightarrow \nabla_\mu \psi^\alpha = \partial_\mu \psi^\alpha - i g \tau(c)^\alpha_\beta \psi^\beta A_\mu^c \quad (6.6)$$

$$\delta A_\mu^c = f_{ab}^c \epsilon^a(x) A_\mu^b + \epsilon^c_{,\mu} \quad (6.7)$$

mit $f_{ab}^c = -2 \epsilon_{abc}$.

Für $\mathcal{L}_{\text{frei}}(A, \partial A)$ benutzt man üblicherweise

$$\mathcal{L}_{\text{frei}}(A, \partial A) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (6.8)$$

mit

$$F_{\mu\nu}^a = A_{\nu,\mu}^a - A_{\mu,\nu}^a + [A_\nu, A_\mu]^a$$

$$[A_\nu, A_\mu]^a = \frac{1}{2} f_{bc}^a (A_\nu^b A_\mu^c - A_\mu^b A_\nu^c) \quad (6.9)$$

VII SU(3) Yang - Mills - Felder

Betrachten wir ψ^α ($\alpha = 1, 2, 3$), so hat man drei Fermionen

zu einem Tripletts zusammengefaßt. Ist ψ^i etwa ein Quark, so mag $i = 1, 2, 3$ die drei Farbfreiheitsgrade der Quarks bezeichnen. Die τ -Matrizen $\tau(c)$, (2×2) -Matrizen der $SU(2)$ -Theorie, werden jetzt durch 8 λ -Matrizen $\lambda(c)$ (3×3 -Matrizen) ($c = 1, \dots, 8$) ersetzt. Für diese gilt

$$[\lambda(j), \lambda(k)] = 2 f_{jke} \lambda(e)$$

$$f_{jke} = \frac{1}{4} \text{Sp} ([\lambda(j), \lambda(k)] \lambda(e)) \quad (7.1)$$

Gemäß der acht Generatoren der Gruppe $SU(3)$ werden acht Eichfelder A_μ^c ($c = 1, \dots, 8$) (Gluonenfelder) nötig, um Eichinvarianz von $I[\psi]$ zu gewährleisten.

Wir werden nun im Weiteren so vorgehen, daß wir das Dirac-System unter Einwirkung der verschiedenen äußeren Felder studieren. Da Dynamik in einem System in der Lage ist, Paare zu bilden, falls die Frequenzen die dazu nötige Energie aufbringen können, beschränken wir uns im weiteren auf global statische äußere Eichfelder. Man findet dann immer eine globale Eichung, in welcher das physikalische System ohne Fourierfrequenzen beschreibbar ist.

Wir sagten bereits in der Einleitung, daß man sich den Zerfall (oder Stabilität) des Dirac Vakuums in derartigen äußeren, hinreichend starken Eichfeldern durch klassische Bilder (wie etwa Energieniveaudiagramme) verständlich machen kann, daß aber ein Vakuumszerfall letztlich quantenfeldtheoretischen Ursprunges ist.

Es ist daher nützlich, kurz eine QFT des Dirac - Systems bei Anwesenheit äußerer Eichfelder zu diskutieren.

Dies soll im folgenden Kapitel geschehen.

[1, 14-16]

VIII Elemente der Rumpf - Theorie

Bei einer manifest eichinvarianten Theorie ist es bei Anwesenheit äußerer Eichfelder keineswegs trivial festzulegen, was ein physikalisches Dirac - Teilchen sein soll. Man findet nämlich folgende Situation: Sei $\{^+ \psi_{s\kappa}\} \cup \{- \psi_{s\lambda}\}$ eine Orthonormalbasis von Lösungen (etwa positiver bzw. negativer Frequenz) der Dirac Gleichung $(i \gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi = 0$ ($s = \pm 1$ bedeute den Spinfreiheitsgrad und κ, λ bezeichne alle weiteren nötigen Quantenzahlen)

Dann definiert die Zerlegung von ψ gemäß

$$\psi(x) = \sum_s \left(\sum_{\kappa} ^+ a_{s\kappa} ^+ \psi_{s\kappa}(x) + \sum_{\lambda} ^- a_{s\lambda} ^+ \psi_{s\lambda}(x) \right) \quad (8.1)$$

einen Fock - Raum und Vakuumzustand nach

$$^+ a_{s\kappa} |0\rangle = ^- a_{s\lambda} |0\rangle = 0 \quad \forall s, \kappa, \lambda \quad (8.2)$$

Eine Eichtransformation von $\mathcal{L}(\psi, \nabla \psi)$ möge eine neue Orthonormalbasis von Dirac - Lösungen $\{^+ \tilde{\psi}_{s\kappa}\} \cup \{- \tilde{\psi}_{s\lambda}\}$ liefern, die mit der alten über eine unitäre Transformation in Beziehung steht:

$$\begin{pmatrix} +\tilde{\Psi}_{s_k} \\ -\tilde{\Psi}_{s_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{s_i,kt} & \beta_{s_j,kt} \\ \beta_{s_i,kt}^* & \alpha_{s_j,kt}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\Psi_{t_i} \\ -\Psi_{t_j} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Falls $|\rho| \neq 0$ gilt, so beschreiben die beiden Orthonormalbasen verschiedene Teilchen und verschiedene Vakuumzustände. Es besteht also die Aufgabe, unter der Vielfalt möglicher Moden physikalische Moden herauszufinden. Ferner sollte ein vernünftiger Teilchenbegriff in der Lage sein, das Entstehen von Paaren aus dem Vakuum zu erklären. Dies leistet die von Rumpf vorgeschlagene Teilchendefinition.

Um Paarbildung beschreiben zu können, betrachtet man zwei Zerlegungen des Hilbert - Raumes H von quadratintegrablen Lösungen der Dirac - Gleichung $(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\Psi = 0$. Rumpf definiert: Eine Dirac - Gleichung ist auslaufende/einlaufende Teilchen-(Antiteilchen) lösung, wenn man sie analytisch in die komplexe m - Ebene fortsetzt, und sie regulär ist bis auf die Vergangenheit/Zukunft, falls m^2 einen negativen/positiven Imaginärteil trägt (m ist die Ruhemasse der Dirac - Teilchen). Man nennt H^+ (H^-) den Hilbert - Raum der auslaufenden Teilchen (Antiteilchen) moden, H_+ (H_-) den Raum der einlaufenden Teilchen (Antiteilchen) moden. I. a. gilt: $H = H^+ \oplus H^- = H_+ \oplus H_-$. Ein System ist instabil und produziert Paare aus dem Vakuum wenn gilt: $H^+ \neq H_+$ oder $\exists \Psi$: $\Psi \in H^+, \Psi \in H_-$. Letzteres heißt in Worten: Das Vakuum zerfällt, wenn eine einlaufende Antiteilchenmode zugleich auch auslaufende Teilchenmode ist. Dies ist in Über-

einstimmung mit der Feynman - Stückelberg Vorstellung über Paarbildung.

Für ein freies Teilchen überzeugt man sich sofort, daß gilt:

$$\psi^{\pm}(x) = e^{\mp iEt} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}} \omega(\vec{k}) \quad E = +\sqrt{k^2 + m^2}$$

$$\psi^{\pm} \in H^{\pm} \cap H_{\pm} \quad (8.4)$$

da das freie Dirac Vakuum natürlich stabil ist.

Das System wird vollständig beschrieben durch die Angabe Orthonormalbasen $\{\psi^{\pm}\}, \{\psi_{\pm}\}$ aus $H^{\pm}, H_{\pm}$.

Wir unterdrücken im weiteren der Einfachheit halber den Spinindex. Den Feldoperator ψ können wir dann sowohl nach der "einlaufenden" wie "auslaufenden" Basis entwickeln:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_k +a_k \psi_k(x) + \sum_L -a_L^{\dagger} \psi_L(x) \\ &= \sum_k +a_k \psi_k(x) + \sum_L -a_L^{\dagger} \psi_L(x) \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\text{mit } \{+a_k, +a_{k'}^{\dagger}\} = \{\pm a_k, \pm a_{k'}^{\dagger}\} = \delta_{kk'} \quad (8.6)$$

Die auslaufende Basis möge durch eine Bogoliubov - Transformation mit der einlaufenden Basis verknüpft sein, etwa in der Form

$$^+\psi_k = \alpha_{kL} \psi_L + \beta_{kL} \psi_L$$

$$^-\psi_k = \beta_{kL}^* \psi_L + \alpha_{kL}^* \psi_L \quad (8.7a)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} ^+\psi \\ ^-\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^+\psi \\ ^-\psi \end{pmatrix} \quad (8.7b)$$

Die Matrix in Gleichung (8.7b) ist die aus der Streuthorie bekannte S - Matrix.

Wegen der Erhaltung der Norm muß diese Transformation unitär sein, d.h.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & \beta^\tau \\ \beta^\dagger & \alpha^\tau \end{pmatrix} \quad (8.8a)$$

, wobei β^τ die zu β transponierte Matrix bedeutet.

Oder:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & \beta^\tau \\ \beta^\dagger & \alpha^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.8b)$$

woraus sich z.B. $\alpha\alpha^\dagger + \beta\beta^\dagger = 1$ (8.9) ergibt. Aus (8.5)

und (8.7a) erhält man sofort das Transformationsgesetz für die Erzeuger und Vernichter

$$^+a_k = \sum_L (\alpha_{Lk}^* a_L + \beta_{Lk}^* a_L^\dagger)$$

$$^-a_k^\dagger = \sum_L (\beta_{Lk} a_L + \alpha_{Lk} a_L^\dagger) \quad (8.9)$$

und für die Anzahl der erzeugten Teilchen in der Mode κ erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \text{vac, in} | {}^+ a_{\kappa}^{\dagger} + a_{\kappa} | \text{vac, in} \rangle &\equiv N_{\kappa} \\ &= \langle \text{vac, in} | \sum_{L, L'} \{ \alpha_{\kappa L} + a_L^{\dagger} + \beta_{\kappa L} - a_L \} \{ \alpha_{L' \kappa}^* a_{L'} + \beta_{L' \kappa}^* a_{L'}^{\dagger} \} | \text{vac, in} \rangle \end{aligned}$$

Das in Vakuum $| \text{in, vac} \rangle$ ist definiert über

$$-a_{\kappa} | \text{in, vac} \rangle = +a_{\kappa} | \text{in, vac} \rangle = 0 \quad \forall \kappa \quad (8.10)$$

sodaß im oberen Vakuumserwartungswert nur bleibt

$$\begin{aligned} N_{\kappa} &= \langle \text{vac, in} | \sum_{L, L'} \beta_{\kappa L} \beta_{\kappa L'}^* - a_L - a_{L'}^{\dagger} | \text{vac, in} \rangle \\ &= \sum_L |\beta_{\kappa L}|^2 \delta(L - L') \end{aligned} \quad (8.11)$$

da klassische Moden $|L\rangle$ auf δ -Distributionen normiert sein mögen. Häufig ist die Basistransformation (8.7a) von sehr einfacher Gestalt, etwa von der Form

$$\alpha_{\kappa L} = \alpha_{\kappa} \delta_{\kappa L} \quad \beta_{\kappa L} = \beta_{\kappa} \delta_{\kappa L} \quad (8.12)$$

Dann ist die Anzahl der erzeugten Teilchen in der Mode einfach

$$N_{\kappa} = \langle \text{vac, in} | {}^+ a_{\kappa}^{\dagger} + a_{\kappa} | \text{in, vac} \rangle = |\beta_{\kappa}|^2 \delta(\kappa - \kappa') \quad (8.13)$$

Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß Gleichungen (8.5) und (8.11, 13) fundamentale Gleichungen für jede Art von Streutheorie sind.

Um diesen Formalismus zu erhellen, insbesondere um klarzustellen, welche physikalische Bedeutung die ein- und auslaufende Basis besitzt, wollen wir das Beispiel des räumlich und zeitlich konstanten elektrostatischen Feldes diskutieren.^[56]

Wir wählen $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (0, 0, 0, -Et)$.

Die Dirac Gleichung im A^μ - Feld schreiben wir als

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi \equiv (\hat{D} - m) \psi = 0 \quad (8.14)$$

woraus sich die iterierte Dirac Gleichung ergibt:

$$(\hat{D} - m)(\hat{D} + m)\chi = (\square_A + \frac{1}{2} e \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2)\chi = 0 \quad (8.15)$$

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$

$$\square_A \equiv (\partial_\mu + ie A_\mu)(\partial^\mu + ie A^\mu)$$

Gleichung (8.15) besitzt folgende Lösungen:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_{m^2 + ieE} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_{m^2 + ieE}$$

$$\chi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_{m^2 - ieE} \quad \chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_{m^2 - ieE}$$

(8.16)

wenn φ_λ die Klein - Gordon Gleichung löst:

$$(\square + \lambda) \varphi_\lambda = 0 \quad (8.17)$$

Gleichung (8.17) besitzt nun folgende Basis $\{\pm \varphi\}$ als Lösung:

$$\begin{aligned} \pm \varphi_{\lambda \vec{k}}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \pm f_{\lambda \vec{k}}^\pm(t) \\ \pm f_{\lambda \vec{k}}^\pm(t) &= z^{-1/2} e^{i\delta} E^*(-a, z) \quad z \equiv \sqrt{2eE} \left(t + \frac{\kappa^2}{eE}\right) \\ -f_{\lambda \vec{k}}^\pm(t) &= \pm f_{\lambda \vec{k}}^{\mp*}(t) \quad a \equiv \frac{\lambda + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2eE} \quad \delta \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} - ia\right) \end{aligned} \quad (8.18)$$

E ist die komplexe parabolische Zylinderfunktion, wie sie in Ref. 62 (19. 17.6) definiert wird. Für $t \rightarrow \infty$ werden die Lösungen (8.18) quasiklassisch, d.h. sie werden in der fernen Zukunft WKB ähnlich.

Dies ist der Grund, warum die $\pm \varphi_{\lambda \vec{k}}$ eine auslaufende Basis bilden. Es ist

$$\begin{aligned} \pm f_{\lambda \vec{k}}^\pm(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} z^{-1/2} \exp(\mp i S_{\lambda \vec{k}}(t)) \\ S_{\lambda \vec{k}}(t) &= \int_0^t dt' \sqrt{m^2 + (\kappa^2 + eEt')^2} \quad (\text{klassische Wirkung}) \end{aligned}$$

$$S_{\lambda \vec{k}}^\pm(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm \infty} \pm \left(\frac{z^2}{4} + a \ln |z| \right)$$

Man findet auch eine analoge einlaufende Basis von (8.17)

$\{\pm \varphi\}$ mit:

$$\pm \varphi_{\lambda \vec{k}}(x) = (2\pi)^{-3/2} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}) \pm f_{\lambda \vec{k}}(t)$$

$$\pm f_{\lambda \vec{k}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} |\vec{k}|^{-1/2} \exp(\mp i S_{\lambda \vec{k}}(t))$$

wenn man nur setzt

$$^+ \varphi_{\lambda \vec{k}} = \alpha_{\lambda \vec{k}} \varphi_{\lambda \vec{k}} + \beta_{\lambda \vec{k}} \varphi_{\lambda \vec{k}}$$

$$\alpha_{\lambda \vec{k}} = \frac{\sqrt{2\pi} \exp(-\pi a/2)}{\Gamma(\frac{1}{2} + ia)} \quad \beta_{\lambda \vec{k}} = i e^{-\pi a} \quad (8.19)$$

D.h. die einlaufende Basis hat die Eigenschaft, zu frühen Zeiten ($t \rightarrow -\infty$) quasiklassisch zu werden. Daher resultiert der Name 'einlaufende Basis'. Lösungen der Dirac - Gleichung $(\hat{D} - m) \psi = 0$ (8.14) beschafften wir uns über

$$^+ \psi_{\vec{k},i} = (2\sqrt{eE})^{-1} (\hat{D} + m)^+ \chi_{\vec{k},i+2}$$

$$^- \psi_{\vec{k},i} = (2\sqrt{eE})^{-1} (\hat{D} + m)^- \chi_{\vec{k},i} \quad (i = 1, 2) \quad (8.20)$$

Die so definierten Wellenfunktionen haben nämlich folgende Eigenschaften:

1. $^{\pm} \psi$ erfüllen die Dirac Gleichung:

$$(\hat{D} - m)^{\pm} \psi = A (\hat{D} - m)(\hat{D} + m)^{\pm} \chi = 0$$

da $^{\pm} \chi$ Lösungen der iterierten Gleichung (8.15) waren.

2. Wir betrachten den Grenzfall $t \rightarrow \infty$.

Das Verhalten der Wellenfunktion wird entscheidend von a in $\int \longrightarrow z^{-1/2} \exp(\mp i(\frac{z^2}{4} + a \ln |z|))$ bestimmt.

Sei i in (8.16) gleich 1 oder 2.

Dann ist $\lambda = m^2 + i\epsilon E$ und $a = \frac{i}{2} + \text{Realteil}$. D.h.

für $i = 1, 2$ können wir nur $\bar{f}$ zur Konstruktion einer Dirac - Mode heranziehen, da andernfalls die Wellenfunktion mit $t \rightarrow \infty$ divergierte!

Eine zu (8.20) analoge einlaufende Basis von Dirac Lösungen erhält man über

$$\begin{aligned} +\psi_{\vec{k},i} &= - (2\sqrt{\epsilon E})^{-1} (\hat{D}+m)_{+} \chi_{\vec{k},i} \\ -\psi_{\vec{k},i} &= - (2\sqrt{\epsilon E})^{-1} (\hat{D}+m)_{-} \chi_{\vec{k},i+2} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (8.21)$$

Wegen der oben genannten quasiklassischen Eigenschaften

der Klein - Gordon Lösungen $\{\pm \psi\}$ und $\{\pm \varphi\}$ findet man

durch Anwendung der Rumpf'schen Teilchendefinition:

$$\pm \psi_{\vec{k},i} \in H^{\pm}, \quad \pm \psi_{\vec{k},i} \in H_{\pm}, \quad \text{d.h.} \quad +\psi_{\vec{k},1}$$

ist die auslaufende Teilchenmode zu Spin aufwärts etc.

Betrachten wir z.B. $+\psi_{\vec{k},1}$. Wegen $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} +\psi_{\vec{k},1} \propto \exp(-iS_{\lambda \vec{k}}(t))$ ergibt sich:

Geben wir m^2 einen negativen Imaginärteil ($m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$),

so bleibt $+\psi_{\vec{k},1}$ regulär in der Zukunft etc., was für eine auslaufende Teilchenmode erfüllt werden muß.

Aus (8.19) erhält man schließlich folgende Transformation:

$$\begin{aligned}
 {}^+ \psi_{\vec{k},t} &= \alpha_{\vec{k},ts} {}^+ \psi_{\vec{k},s} + \beta_{\vec{k},ts} {}^+ \psi_{\vec{k},s} \\
 {}^- \psi_{\vec{k},t} &= -\beta_{\vec{k},ts}^* {}^+ \psi_{\vec{k},s} + \alpha_{\vec{k},ts}^* {}^+ \psi_{\vec{k},s}
 \end{aligned}
 \quad (t, s = 1, 2) \quad (8.22)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\vec{k},11} &= \alpha_{\vec{k},22} = \varepsilon m \alpha_{\vec{k}} & \alpha_{\vec{k},21} &= \varepsilon (-\kappa^1 + i \kappa^2) \alpha_{\vec{k}} \\
 \alpha_{\vec{k},12} &= \varepsilon (\kappa^1 + i \kappa^2) \alpha_{\vec{k}} & \alpha_{\vec{k}} &\equiv \sqrt{2\pi} \exp(-\frac{\pi b}{2} + \frac{i\pi}{4}) / \Gamma(1+ib) \\
 b &\equiv \varepsilon^2 (m^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2) & \varepsilon &\equiv (2eE)^{-1/2} \\
 \beta_{\vec{k},11} &= \beta_{\vec{k},22} = e^{-\pi b} & \beta_{\vec{k},12} &= \beta_{\vec{k},21} = 0
 \end{aligned}$$

und in Analogie zu (8.13) erhält man für die Anzahl der produzierten Teilchen

$$\begin{aligned}
 \langle \text{vac}, \text{in} | {}^+ a_{\vec{k}s}^\dagger {}^+ a_{\vec{k}'s} | \text{in}, \text{vac} \rangle &= |\beta_{\vec{k}s}|^2 \int^{(3)} (\vec{k} - \vec{k}') \\
 &= e^{-\pi \frac{(m^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{eE}} \int^{(3)} (\vec{k} - \vec{k}')
 \end{aligned}
 \quad (8.23)$$

unabhängig vom Spin und Quantenzahl k_3 der erzeugten Teilchen. Nach Nikishov kann man das Ergebnis folgendermaßen deuten:

${}^+ \psi_{\vec{k},i}$ etwa hat den kanonischen Impuls k^3 in z - Richtung, also den kinetischen Impuls von $k^3 - eEt$ in z - Richtung, welcher für $t = \frac{k^3}{eE}$ verschwindet. ${}^+ \psi_{\vec{k},i}$ beschreibt Teilchen, welche bei $t = \frac{k^3}{eE}$ entstehen und $|\beta_{\vec{k},s}|^2$ ist die Anzahl der Teilchen, welche zur Zeit $t(\vec{k})$ mit Spin s gebildet werden.

Obwohl Rumpfs Teilchen- bzw. Vakuumsdefinition von großer Allgemeinheit ist, kann das schon oben erwähnte überkritische Vakuum, welches bei global statischen äußeren Eichfeldern in geeigneter Geometrie definierbar ist, damit nicht erfaßt werden.

Das überkritische Vakuum tritt in natürlicher Weise ausgezeichneten Bezugssystemen als Resonanzlösung der Dirac Gleichung mit komplexer Energie E auf, und solche Resonanzlösungen ordnen sich nicht in das Rumpf'sche Schema von Teilchen / Antiteilchen ein.

Das überkritische Vakuum erkennen wir jedoch daran, daß mit wachsender Kopplungsstärke Dirac - Niveaus in das untere Dirac - Kontinuum eintauchen bzw. Teilchen mit Antiteilchenmoden entarten.

Wie man zeigen kann, tritt dann ein neuer stabiler Grundzustand auf, welcher alte Teilchen enthält: Das überkritische Vakuum.

Wir erwähnen schließlich noch, daß im freien Fall die Rumpf'sche Teilchendefinition mit der von Feynman - Stückelberg identisch ist: Allgemein erfüllen die Green'schen Funktionen K , $\tilde{K}$ der Dirac Gleichung

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m + i\varepsilon) K(x, x') = -(-g)^{-1/2} \delta(x - x') \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}^+) \quad (8.8a)$$

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m - i\varepsilon) \tilde{K}(x, x') = -(-g)^{-1/2} \delta(x - x') \quad (8.8b)$$

welche im freien Fall durch die Wahl geeigneter Randbedingung mit dem Feynman - bzw. Anti - Feynman - Propagator

übereinstimmen.

Einlaufende / auslaufende Teilchenmoden werden durch $\tilde{K} / K$ in die Vergangenheit / Zukunft propagiert, wogegen einlaufende / auslaufende Antiteilchenmoden durch $K / \tilde{K}$ in die Vergangenheit / Zukunft propagiert werden.

IX. Äußere elektromagnetische Felder

Betrachten wir das Dirac - System im äußeren elektromagnetischen Feld.

Die Dirac Gleichung schreibt sich dann als

$$(A_\mu = (V, \vec{A}))$$

$$(E - V) \psi = [\vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m] \psi \quad (9.1)$$

mit $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. σ sind die üblichen Pauli - Matrizen.

i) Dirac Gleichung im elektrostatischen Feld

Die Instabilitäten des Dirac Vakuums im reinen elektrostatischen Feld ($\vec{A} = 0$) sind in der Literatur wohl bekannt und wir können uns hier kurzfassen:

Das überkritische Vakuum wurde bereits in der Einleitung kurz diskutiert.

Diskutiert man etwa ein räumlich und zeitlich konstantes Coulomb - Feld, so kann man die Paarbildung mit Hilfe des

Rumpf - Formalismus beschreiben und die Erzeugungsraten angeben (vgl. Kapitel VIII).

Hier existiert kein stabiler Grundzustand.

ii) Dirac Gleichung im reinen Magnetfeld

Im reinen Magnetfeld kommt man zu folgendem Ergebnis:

Wir schreiben Ψ als $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ und die Dirac Gleichung lautet für $V = 0$

$$(E - m) \varphi = \vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}) \chi$$

$$(E + m) \chi = \vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A}) \varphi \quad (9.2)$$

oder als Gleichung zweiter Ordnung für φ :

$$(E^2 - m^2) \varphi = [\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})]^2 \varphi = -\Delta_A - e\vec{\sigma}\vec{B} \quad (9.3)$$

wobei gilt:

$$(\vec{p} - e\vec{A})^2 \equiv -\Delta_A \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (9.4)$$

Nun sind $\vec{\sigma}$ und $(\vec{p} - e\vec{A})$ selbstadjungierte Operatoren über dem Raum der quadratintegrierbaren, differenzierbaren 2 - er Spinoren, falls $\vec{A}$ reell und differenzierbar ist. Da $\vec{\sigma}$ mit $(\vec{p} - e\vec{A})$ kommutiert, ist $\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})$ selbstadjungiert und folglich das Quadrat ein positiver reeller Operator.

Bezeichnen wir Eigenfunktionen von $[\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})]^2$ mit $\varphi_{\vec{\kappa}}$ so gilt:

$$[\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})]^2 \varphi_{\vec{\kappa}} = \kappa^2 \varphi_{\vec{\kappa}} \quad (9.5)$$

$$\text{und } E^2 = \vec{\kappa}^2 + m^2 \quad (9.6)$$

d.h. wie im freien Fall ist die Hilbert - Raumzugehörigkeit durch das Frequenzvorzeichen von E gegeben und das Dirac Vakuum ist stabil.

Dies ist vielleicht insofern erstaunlich, als daß man einen Vakuumszerfall aufgrund der magnetischen Dipolwechselwirkung vermuten könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die kinetische Energie $-\Delta_A$ den Gesamtoperator $[\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})]^2$ positiv macht und einen Vakuumszerfall verhindert.

Wir bringen zwei Beispiele dazu:

[40]

iii) Das homogene Magnetfeld

Wir können das Vektorpotential $\vec{A}$ so wählen:

$$A_x = -\frac{B}{2} y \quad ; \quad A_y = \frac{B}{2} x \quad (9.7)$$

und die iterierte Gleichung lautet:

$$(E^2 - m^2) \varphi = \left[-\Delta_{\text{frei}} + \left(\frac{eB}{2}\right)^2 (x^2 + y^2) - eB\sigma_z - eB\hat{L}_z \right] \quad (9.8)$$

mit $\hat{L}_z = i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Die Lösung von (9.8) lautet dann in Zylinderkoordinaten:

$$\psi_{+1, E, n, \mu} = N \frac{e^{i(\mu\phi + p_z z)}}{E + m} u^{s - \frac{1}{4}} e^{-u/2} \begin{bmatrix} (E+m) {}_1\bar{F}_1(-n, \mu+1; u) \\ 0 \\ p_z {}_1\bar{F}_1(-n, \mu+1; u) \\ i\left(\frac{eB}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2n}{\mu+1} e^{i\phi} u^{\frac{1}{2}} {}_1\bar{F}_1(-n+1, \mu+2; u) \end{bmatrix} \quad (9.9a)$$

$$\psi_{-1, E, n, \mu} = N' \frac{e^{i(\mu\phi + p_z z)}}{E + m} u^{s - \frac{1}{4}} e^{-u/2} \begin{bmatrix} 0 \\ (E+m) {}_1\bar{F}_1(-n, \mu+1; u) \\ -i\left(\frac{eB}{2}\right)^{\frac{1}{2}} 2\mu e^{-i\phi} u^{-\frac{1}{2}} {}_1\bar{F}_1(-n-1, \mu; u) \\ -p_z {}_1\bar{F}_1(-n, \mu+1; u) \end{bmatrix} \quad (9.9b)$$

mit $u = \frac{eB}{2} \zeta^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $s - \frac{1}{4} = \frac{\mu}{2}$ und $\hat{L}_z \psi = \mu \psi$.

Es ist $n = \frac{a + \mu + \sigma}{2} \rightarrow s - \frac{1}{4}$ mit $a = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2}{eB}$, sodaß die Energieformel lautet

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + 2 eB \left(n + \frac{1}{2} \right) + \sigma eB \quad (9.10)$$

wenn $\sigma = \pm 1$ der Spineigenwert ist.

Aus dieser letzten Formel wird noch einmal deutlich, daß im Spinorfall keine Vakuuminstabilität aufgrund der magnetischen Dipolwechselwirkung des Spins auftritt, da die kinetische Nullpunktsenergie gerade die Dipolwechselwirkung aufhebt. Dies wird jedoch nicht mehr der Fall sein, wenn wir statt Dirac - Teilchen solche mit Spin 1 betrachten. Hier wird E^2 nicht mehr positiv bleiben und wir werden erwarten, daß hierfür Vakuuminstabilität auftritt, in Analogie zum weiter hinten diskutierten überkritischen Diracfeld in der Einstein - Cartan - Theorie (in jener Theorie wechselwirkt die Torsion des Raumes mit dem Spin der Materie). So wird etwa ein nicht abelsches masseloses A_μ^a - SU (2) Eichfeld in einem äußeren hinreichend starken Farbmagnetfeld instabil und wird Gluonen aus dem Vakuum erzeugen. [126 - 128]

iv) Beispiel eines inhomogenen Magnetfeldes

Wir betrachten das folgende Magnetfeld:

$$A_y = - \frac{B}{x} \quad (B_z = \frac{B}{x^2}) \quad (9.11)$$

Gleichung (9.3) lautet dann:

$$(E^2 - m^2 - p_y^2 - p_z^2) \psi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{eB}{x}\right)^2 - \frac{eB\sigma}{x^2} + \frac{2eBp_y}{x} \right] \psi \quad (9.12)$$

Dies führt auf die Whittaker'sche Differentialgleichung

$$4u^2 \varphi'' = (u^2 - 4\kappa u + 4\gamma^2 - 1) \varphi \quad (9.13)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$S = 2i (E^2 - m^2 - p_y^2 - p_z^2)^{1/2} \equiv 2ip$$

$$u = 2ip_x$$

$$4\gamma^2 = 1 - 4eB(\sigma - eB) \quad \kappa = -\frac{2eB p_y}{S}$$

Die im Ursprung reguläre Lösung von (9.13) lautet:

$$M_{\kappa, \gamma}(u) = u^{\gamma+1/2} e^{-u/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \gamma - \kappa, 2\gamma + 1; u\right) \quad (9.14)$$

Damit lautet die volle Lösung der Dirac Gleichung (9.12):

$$\psi_{+1, E, p_{y,z}} = \frac{N e^{i(p_y y + p_z z)}}{E + m} u^{\gamma+1/2} e^{-u/2} \begin{bmatrix} E + m \\ 0 \\ p_z \\ 2p \left[\left(\frac{\gamma+1/2}{u} - \frac{1}{2} \right) + \frac{i p_y}{2p} - \frac{eB}{u} + \frac{d}{du} \right] \end{bmatrix} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \gamma - \kappa, 2\gamma + 1; u\right) \quad (9.15a)$$

$$\psi_{-1, E, p_{y,z}} = \frac{N e^{i(p_y y + p_z z)}}{E + m} u^{\gamma+1/2} e^{-u/2} \begin{bmatrix} 0 \\ E + m \\ 2p \left[\left(\frac{\gamma+1/2}{u} - \frac{1}{2} \right) - \frac{i p_y}{2p} + \frac{eB}{u} + \frac{d}{du} \right] \\ - p_z \end{bmatrix} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \gamma - \kappa, 2\gamma + 1; u\right) \quad (9.15b)$$

Und die Lösungen sind für $p \in \mathbb{R}$ normierbar. Also gilt

$$E^2 = m^2 + p_y^2 + p_z^2 + p^2 \quad (9.16)$$

was die Vakuumstabilität wieder anzeigt.

X Äußere Einstein - Felder

i) Dirac Gleichung im Einstein - Feld

In diesem Kapitel setzen wir den Spingehalt der felderzeugenden Materie und den Torsionstensor der Geometrie gleich Null.

Dies liefert aus der totalen Lagrangefunktion (5.7) die übliche Einstein Gleichung für das $g_{\mu\nu}$ -Feld und die Dirac Gleichung in einem Einstein - Hintergrund.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (10.1)$$

$$(\hat{D} - m) \Psi = (i \gamma^\mu \nabla_\mu - m) \Psi = 0 \quad (10.2)$$

mit $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ und ^[41]

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^\nu (\gamma_{\nu,\mu} - \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \gamma_\lambda) \quad (10.3)$$

Wir nehmen im weiteren an, daß das äußere $g_{\mu\nu}$ -Feld der Einstein - Gleichung (10.1) genügt. Da sich der Dirac-Operator $(\hat{D} - m)$ häufig besser in "quadrierter Form" behan-

deln läßt, bilden wir $(\hat{D} - m)(\hat{D} + m)$:

$$\begin{aligned}
 (\hat{D} - m)(\hat{D} + m) &= -\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu - m^2 \\
 &= -\gamma^\mu [\nabla_\mu, \gamma^\nu] \nabla_\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2 \\
 &= -\gamma^\mu [\nabla_\mu, \gamma^\nu] \nabla_\nu - \nabla^\mu \nabla_\mu + \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} - m^2 \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

wobei wir benutzten:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu}$$

Hier ist $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu,\mu} - \Gamma_{\mu,\nu} + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ der Krümmungsbi-sintensor. Es gilt^[4.4]:

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} = i \frac{R}{4} \quad (10.5)$$

$$\text{und } \gamma^\mu [\nabla_\mu, \gamma^\nu] \nabla_\nu = \gamma^\mu [\partial_\mu + \Gamma_\mu, \gamma^\nu] \nabla_\nu$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma^\mu \{ \gamma^\nu_{,\mu} + [\Gamma_\mu, \gamma^\nu] \} \nabla_\nu = - \{ \alpha^\nu_\mu \} \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \\
 &= - \{ \alpha^\nu_\mu \} g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \quad (10.6)
 \end{aligned}$$

Hier wurde von folgender Eigenschaft der Dirac - Matrizen Gebrauch gemacht:

$$\gamma^\nu_{,\mu} + \{ \alpha^\nu_\mu \} \gamma^\mu + [\Gamma_\mu, \gamma^\nu] = 0 \quad (10.7)$$

Damit ergibt sich

$$(\hat{D} - m)(\hat{D} + m) = -\square_{sp} - \frac{R}{4} - m^2 \quad (10.8)$$

mit

$$\square_{sp} = \nabla_\mu \nabla^\mu - \{\omega_\mu^\nu\} g^{\mu\alpha} \nabla_\nu \quad (10.9)$$

Hier soll der Index sp an Spinoroperator erinnern. $\square_{sp}$ läßt sich schreiben als

$$\square_{sp} = \square_{sk} + \square_F = \square_{sk} + g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\nu,\mu} + \Gamma_\nu \partial_\mu + \Gamma_\mu \partial_\nu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \{\omega_\mu^\nu\} \Gamma_\alpha \right] \quad (10.10)$$

wobei $\square_{sk}$ der übliche Quablaoperator für Skalarfelder ist

$$\square_{sk} = (-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (10.11)$$

Im Falle, daß $\Gamma_\mu = 0$ können wir dann sofort die Stabilität des Vakuums zeigen:

Mit $\psi = e^{-iEt} \varphi(x^s)$ ($s = 1, 2, 3$) schreibt sich die iterierte Gleichung dann als

$$E^2 \varphi = g_{..} \left[-\Delta_\mu (x^s) + \frac{R}{4} + m^2 \right] \varphi \quad (10.12)$$

Hierbei ist $-\Delta_\mu$ der kovariante Laplace - Operator

$$\Delta_\mu = (-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^s} (-g)^{1/2} g^{st} \frac{\partial}{\partial x^t} \quad (s, t = 1, 2, 3) \quad (10.13)$$

*)
in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und $-\Delta_{\mathcal{M}}$ kann als Operator der kinetischen Energie in der Raum - Zeit angesehen werden. Dieser sollte für einen vernünftigen Raum positiv sein. Der Krümmungsskalar ist positiv solange die Energiebedingung

$$\varrho > 3p \quad (10.14)$$

für die felderzeugende Materie ($T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(\varrho, -p, -p, -p)$) erfüllt ist. Wegen der Einstein Gleichung (10.1) folgt nämlich durch Kontraktion

$$R = \kappa T^{\mu}_{\mu} = \kappa (\varrho - 3p) \quad (10.15)$$

Solange die Mannigfaltigkeit global statisch ist, und keine Ereignishorizonte auftreten, werden wir i. d. R. eine globale Zeitkoordinate t auswählen können bezüglich der g_{00} , aufgrund der Signatur der Raum - Zeit positiv ist.

Daher stellt die rechte Seite von Gleichung (10.12) einen positiven Operator dar.

Damit sind wie im äußeren Magnetfeld Teilchen und Antiteilchen durch das Frequenzvorzeichen getrennt und das Dirac Vakuum ist stabil.

Die Γ abhängigen Terme in (10.10) beschreiben Zusatzeffekte, welche durch den Spin $\frac{1}{2}$ auftreten (Spin - Bahnwechselwirkung etc.).

*) Zum Begriff der Mannigfaltigkeit siehe Anhang A

Die Erfahrung zeigt, daß die Summe dieser Effekte, wenigstens in statischen, sphärisch symmetrischen, asymptotisch flachen Metriken, stets repulsiv wirkt.

ii) Statische, sphärisch symmetrische und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten mit globaler Zeitkoordinate

Betrachten wir z.B. statische, sphärisch symmetrische Mannigfaltigkeiten mit einer globalen Zeitkoordinate der Form

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (e^{2\nu(r)}, -e^{2\lambda(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (10.16)$$

mit $e^\nu, e^\lambda > 0$. Die Dirac Gleichung lautet hier [42, 43]

$$\mathcal{K} \phi = \omega \phi \quad (10.17)$$

wobei

$$\mathcal{K} = e^{\mu/2} \left[i \gamma_0 \gamma_1 e^{-\lambda/2} \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\gamma_1}{r} \hat{K} + \gamma_0 m \right] \quad (10.18)$$

$$\phi = e^{\nu/4} r (\sin \theta)^{1/2} \psi \quad (10.19)$$

$\hat{K}$ ist der Drehimpulsoperator mit $\hat{K} = \beta (\vec{\sigma} \hat{L} + 1)$.

$$\hat{K} \phi = \alpha \phi \quad (\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (10.20)$$

(Überstrichene Indizes sollen anholonome Größen (s. S. 21) bezeichnen. Diese beziehen sich auf den Minkowski - Raum.)

Anstelle den Operator (10.10) in der Metrik (10.14) auszu-
schreiben, quadrieren wir einfach Gleichung (10.15) und
erhalten

$$E^2 \phi = e^{\nu} \left[-\Delta_r + m^2 + \frac{x^2}{r^2} + e^{-\lambda/2} \left(\frac{x}{r^2} - \frac{\nu}{2} \frac{x}{r} \right) - i \gamma_1 e^{-\lambda/2} \frac{\nu}{2} m \right] \phi$$

wobei $\Delta_r \equiv e^{-\frac{\lambda+\nu}{2}} \frac{\partial}{\partial r} e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \frac{\partial}{\partial r}$ (10.21)

iii) Das effektive Potential

In der letzten Gleichung können wir Ableitungen der Metrik
näherungsweise vernachlässigen und im Sinne einer WKB - Nä-
herung x und r als groß betrachten.

Das Verhalten der Dirac - Teilchen ist dann im Wesentlichen
durch das effektive Potential V_{eff} bestimmt

$$V_{\text{eff}}(r) = e^{\nu/2} \left(m^2 + \frac{x^2}{r^2} \right)^{1/2} \quad (10.22)$$

(Es ist bekannt, daß das Verhalten klassischer Probeteil-
chen in einer Mannigfaltigkeit (10.14) durch dieses Poten-
tial beschrieben wird.) ^[45,46]

Wir folgern also:

In der Einstein - Geometrie ist das Dirac Vakuum stabil
falls das $g_{\mu\nu}$ - Feld global statisch ist und die Topologie
"vernünftig". Der Grund liegt darin, daß ein solches $g_{\mu\nu}$ -
Feld nicht in der Lage ist, ein virtuelles Paar voneinander

zu trennen. Teilchen als auch Antiteilchen gravitieren in gleicher Weise (Ladungssymmetrie).

iv) Dirac - Gleichung im Newton'schen Potential

Für eine gravitierende Zentralmasse M können wir den metrischen Tensor durch die Schwarzschild - Metrik ausdrücken

$$e^{\nu} = \left(1 - \frac{2}{r} \frac{GM}{c^2}\right) \quad (10.23)$$

Entwickeln wir dann V_{eff} in eine Taylor - Reihe nach Potenzen von r^{-1} , so erhalten wir das Kepler - Potential

$$V_{\text{kep}} = m - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} \frac{GM^2 m}{r^2} + \dots \quad (10.24)$$

D.h. in nichtrelativistischer Näherung geht das effektive Potential über in das Newton'sche Potential

$$\phi_N(r) = - \frac{GMm}{r} \quad (10.25)$$

und wir bemerken, daß in der Dirac - Gleichung das Newton'sche Potential ϕ_N an die Masse m und nicht an die Ableitung ∂_μ koppelt. D.h. die Ankopplung an das Gravitationsfeld geschieht effektiv skalar. Der Grund dafür liegt einfach im folgenden:

Während das A^μ - Feld als Vektorfeld unterschiedlich an Teilchen und Antiteilchen koppelt, so koppelt das $g_{\mu\nu}$ - Feld

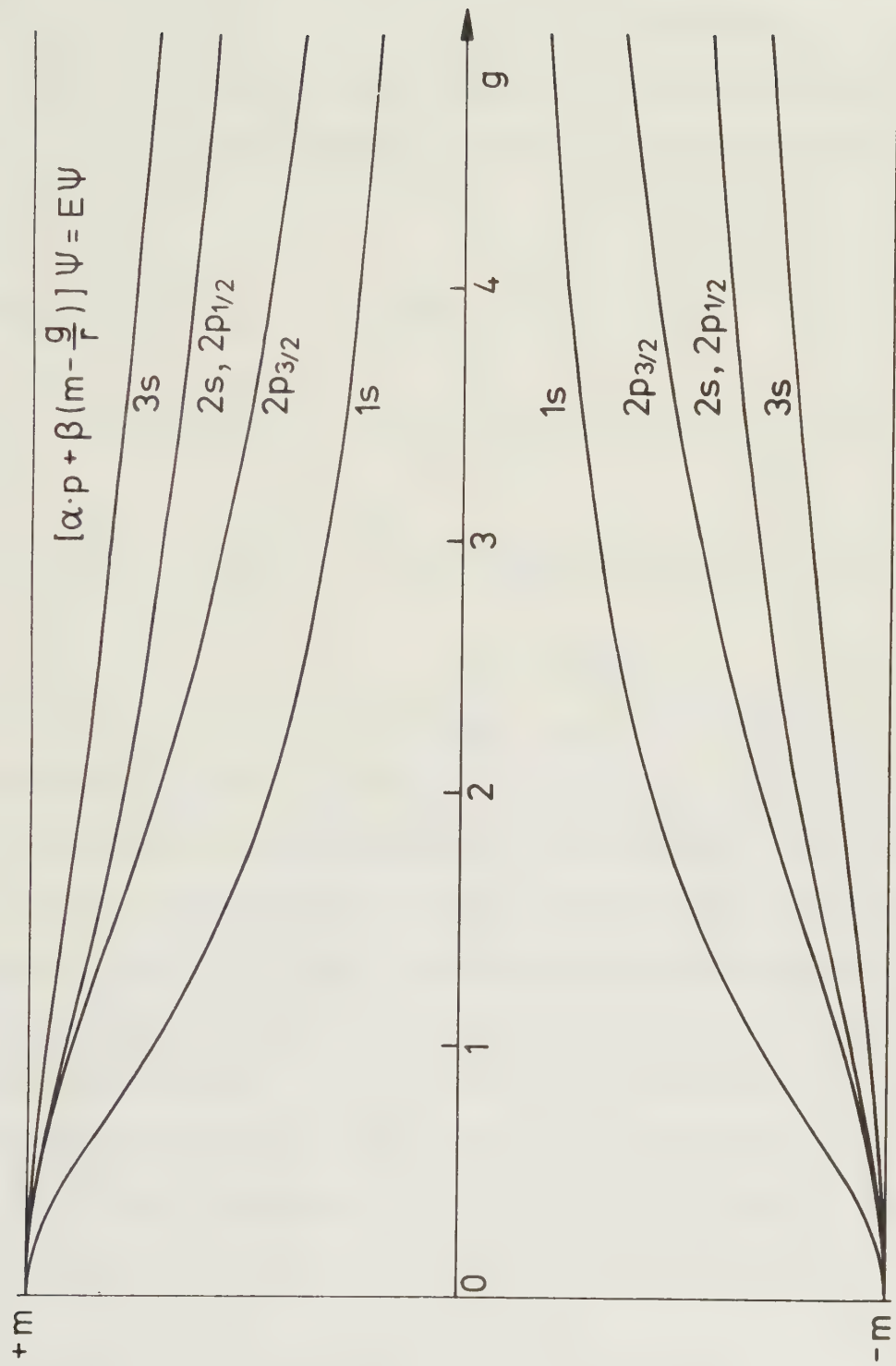


Fig.2

als Spin Spin 2 - Feld gleichermaßen an Teilchen und Antiteilchen. Dieser Umstand wird letztlich durch das Äquivalenzprinzip bestimmt.

Bekanntlich ist das Dirac Vakuum stabil, falls man ein äußeres Newtonähnliches Potential skalar in die Dirac - Gleichung koppelt. ^[47] Für

$$H \psi = [\vec{\alpha} \vec{p} + \beta (m + \phi_N)] \psi = E \psi \quad (10.26)$$

findet man folgende Energieeigenwerte:

$$E_{\pm} = \pm m \left[1 - g^2 / (N + \sqrt{x^2 + g^2})^2 \right]^{1/2} \quad (10.27)$$

mit $N = 0, 1, \dots$ und $g \equiv GMm$.

Die am stärksten gebundenen Energieniveaus sind in Fig. 2 zu sehen. Die Kopplungsstärke g wird hier auf der Abszisse variiert. Man sieht, das mit wachsender Kopplungsstärke ($g \rightarrow \infty$) die Energieniveaus sich nur asymptotisch der $E = 0$ Achse nähern. Da Teilchen und Antiteilchen in einem ungeladenen Gravitationsfeld gleichermaßen angezogen werden, ist Fig. 2 symmetrisch bezüglich der $E = 0$ Achse. Daß sich dann Energielevels mit $E > 0$ nicht mit solchen mit $E < 0$ kreuzen dürfen, ergibt sich aus dem bekannten Theorem von Wigner und Neumann.

v) Dirac - Gleichung im Feld einer gravitierenden Massenschale

Relativistische Effekte ändern nun das effektive Potential drastisch. So ist etwa aus (10.22) zu erkennen, daß relativistische Effekte die Drehimpulsbarriere zerstören.

Fig. 3 zeigt die numerische Lösung für die Eigenfrequenzen der Dirac - Gleichung im Feld einer gravitierenden Massenschale mit

$$e^{\nu} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) & r \geq R \\ \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) & r < R \end{cases}$$

$$e^{\lambda} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & r \geq R \\ 1 & r < R \end{cases} \quad (10.28)$$

M ist die Masse der gravitierenden Schale. Der Radius R der Schale ($R > r_s = 2 GM$) wurde hierbei variiert. (Der Vorteil dieses Modells liegt darin, daß wir R bis hin zu r_s variieren können; die Flüssigkeitsmodelle ausgedehnter Sterne versagen stets bei $R = \frac{9}{8} r_s$, wo der hydrodynamische Druck divergiert. ^[48])

Man sieht, daß alle Frequenzen gegen Null streben mit $R \rightarrow r_s$, dem Schwarzschildradius der Schale. ^[43] Genau dies ist aber zu erwarten (vgl. (10.20)) da $e^{\nu/2}(R) \rightarrow 0$ falls $R \rightarrow r_s$.

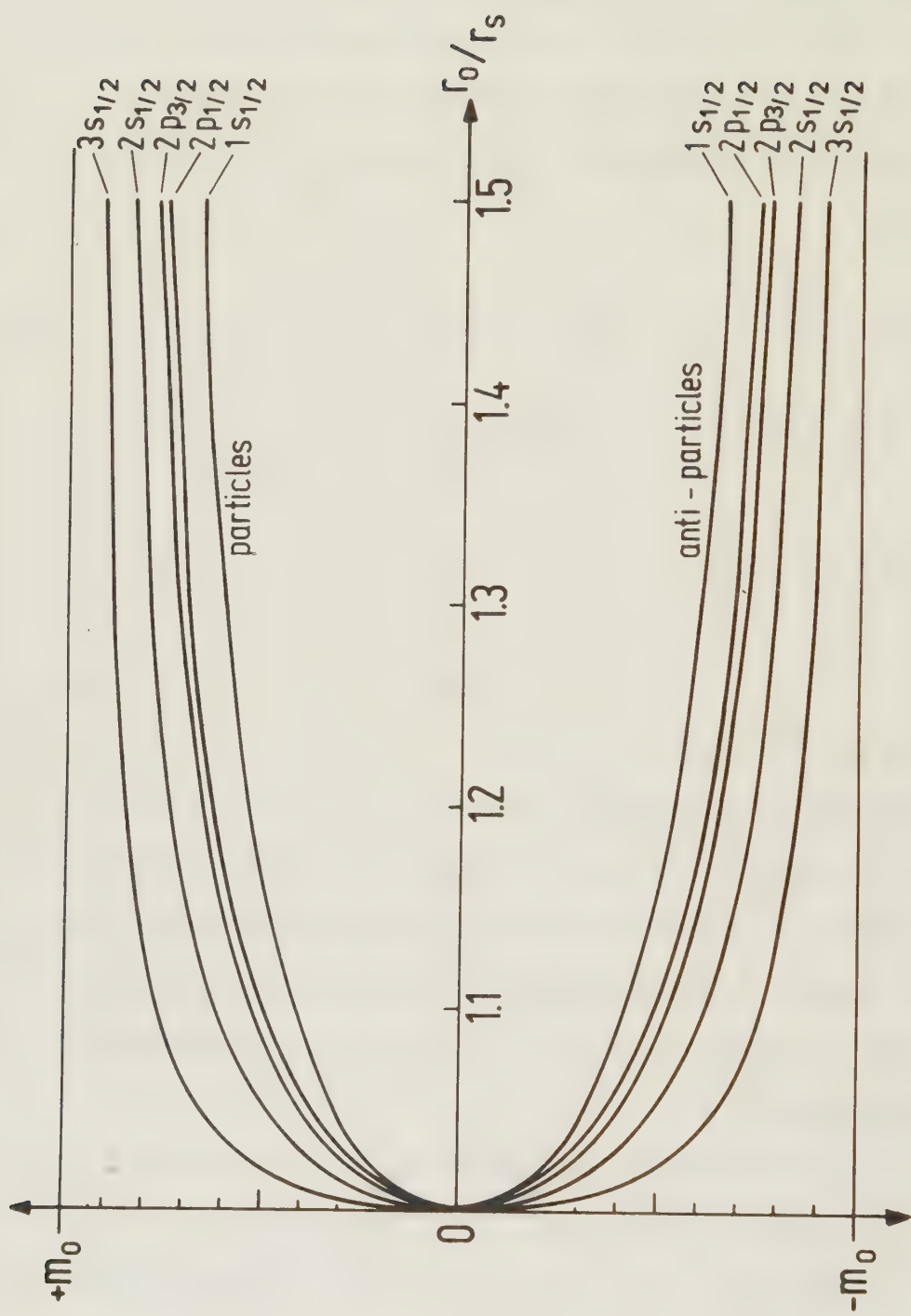


Fig. 3

Da $e^{1/2}$ der Faktor der Rotverschiebung im sphärisch symmetrischen Gravitationsfeld ist, kann man das Ergebnis auch so verstehen:

Da die Frequenzen ω durch Separation mit x^0 gewonnen werden und x^0 nur für $r \rightarrow \infty$ im Falle des asymptotisch flachen Raumes mit der physikalisch meßbaren Zeit übereinstimmt, bedeuten die ω 's asymptotische Frequenzen, wie sie ein Beobachter dort messen würde.

vi) Das Atom im Schwarzschild - Feld

[49]

Dies wird durch folgende Rechnung von Papapetrou bestätigt:

Setzt man ein Atom (Elektron im Coulomb - Potential eines Punktkernes) in ein Schwarzschild - Feld an die Stelle $r_0 > r_s$, so erhält man unter Vernachlässigung aller Ableitungen der $g_{\mu\nu}$'s folgendes Energiespektrum:

$$\omega_i(r_0) = e^{1/2}(r_0) \omega_i \quad (10.29)$$

wobei die ω_i die üblichen Energiewerte der Sommerfeld'schen Feinstrukturformel sind. (Der Verlauf dieser Niveaus in Abhängigkeit von r_0 ist in Fig. 4 zu sehen.)

Es ist klar, daß der Verlauf dieser Niveaus $\omega_i(r_0)$ in Abhängigkeit von r_0 durch die Rotverschiebung zustande kommt, welche zwischen $r = r_0$ und $r = \infty$ im Schwarzschild - Feld herrscht. Ganz analog dazu läßt sich auch das Verhalten der

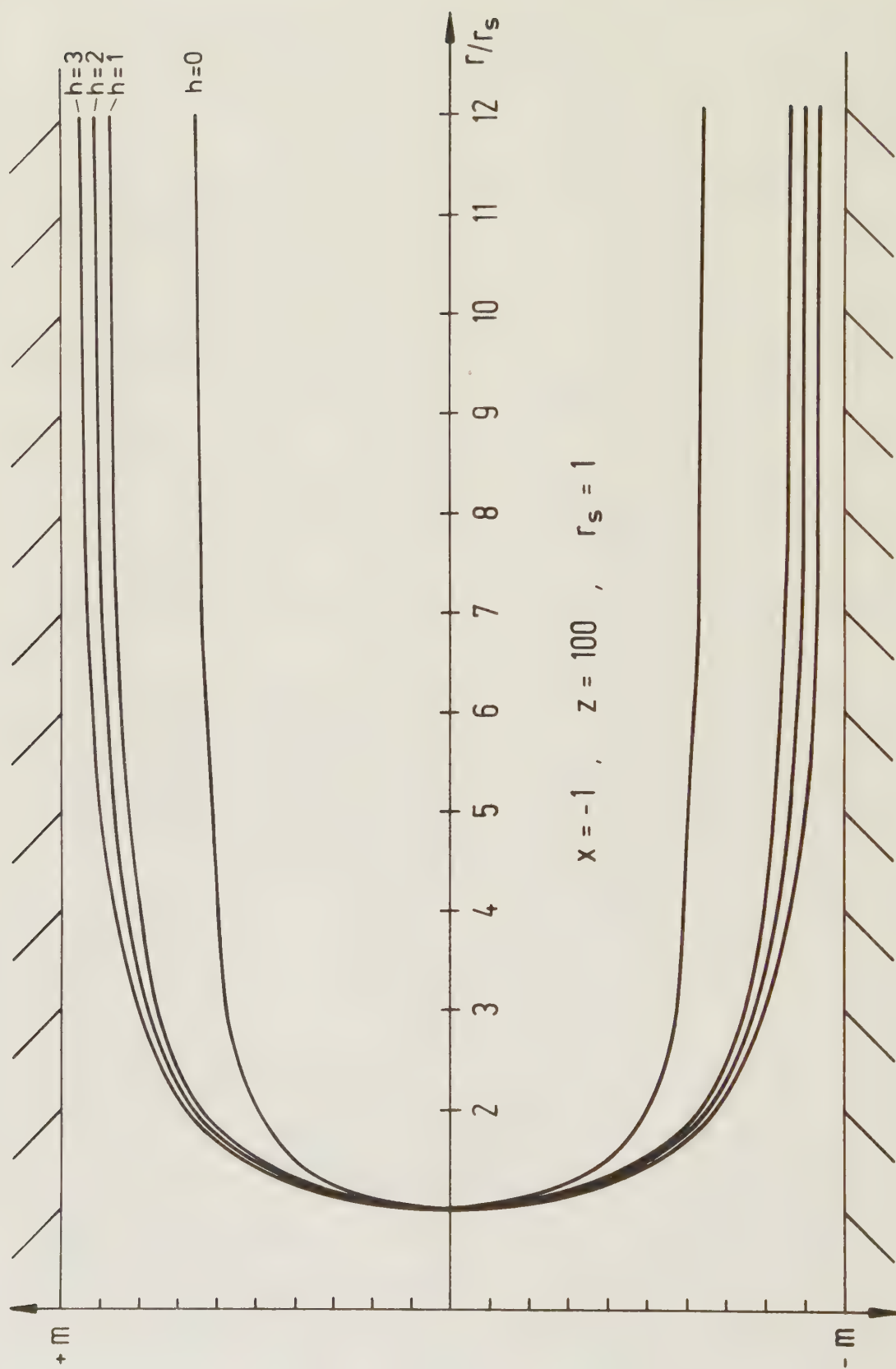


Fig. 4

Levels von Fig. 3 als bedingt durch eine mittlere Gravitationsrotverschiebung $\langle e^{1/2}(r) \rangle$ verstehen.

Man sollte jedoch nicht auf die Idee kommen, daß diese Rotverschiebung nur ein Koordinateneffekt sei; das Newton'sche Potential läßt sich ja aus $e^{1/2}$ gemäß $\frac{\phi_N}{m} = \frac{1}{2} (1 - e^v)$ extrahieren. Und jenes läßt sich nur lokal in einem geodätischen Koordinatensystem wegtransformieren, in welchem das $g_{\mu\nu}$ - Feld dynamisch erscheint.

Betrachtet man ein Elektron im Newton'schen Zentralpotential (vgl. (10.26)), so wird man die Energiezustände als rein durch die Newton'sche Anziehungskraft bedingt ansehen und von Rotverschiebung erst sprechen, wenn sich ein Photon aus dem Newton'schen Kraftfeld entfernt.

Dies liegt daran, daß im Gegensatz zur Einstein'schen Gravitationstheorie in der Newton'schen Theorie eine globale, absolute Zeitkoordinate existiert, welche die physikalisch meßbare Zeit beschreibt.

Anhand der Figuren 3 und 4 könnte man vermuten, daß das Klein'sche Paradoxon auftaucht, falls $R \leq r_s$ (bzw. $r_0 \leq r_s$) gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Der Grund liegt darin, daß das System für $R \leq r_s$ nicht mehr global statisch bleibt.

Dies ist leicht aus dem reinen Schwarzschild - Feld

$$e^v = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (10.30)$$

zu erkennen, da für $r < r_s$ r zur zeitartigen und t zur raumartigen Koordinate wird. Um die übliche Bedeutung von raum- und zeitartigen Koordinaten hervorzuheben, können

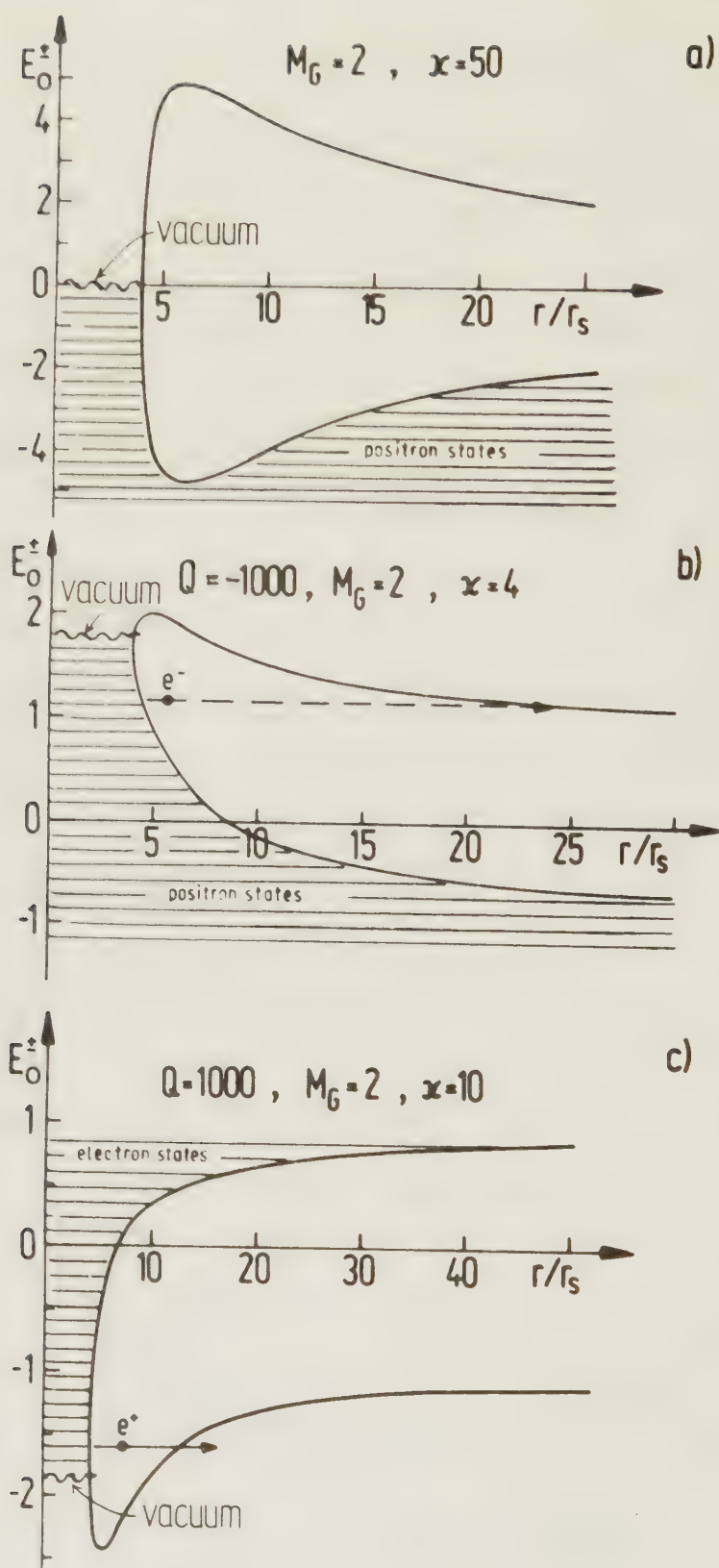


Fig.5

wir die Schwarzschild - Metrik für $r \leq r_s$ so schreiben:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{t}\right) dr^2 - \left(1 - \frac{2GM}{t}\right)^{-1} dt^2 - t^2 d\Omega^2 \quad (10.31)$$

und wir sehen, daß innerhalb des Ereignishorizontes die Metrik dynamisch und raumunabhängig ist.

Die Paarbildung, welche mit der Entstehung eines Ereignishorizontes und der damit verknüpften Dynamik verbunden ist (Hawking - Effekt),^[50,51] soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden.

vi) Dirac - Teilchen im Schwarzschild - Feld

Aus der Form des effektiven Potentials im Schwarzschild - Feld (siehe Fig. 5a) ist zu erkennen, daß als Lösungen der Dirac - Gleichung im reinen Schwarzschild - Feld nur ein Kontinuum mit Resonanzen in Frage kommen kann.

Jene Resonanzen der Dirac - Gleichung im reinen Schwarzschild - Feld wurden auf numerischem Wege bereits vor einigen Jahren ermittelt.^[43]

vii) Paarbildung durch geladene Schwarze Löcher

Das Klein'sche Paradoxon taucht natürlicherweise auf, falls wir geladene Schwarze Löcher studieren.

Das effektive Potential, welches das Verhalten von Proben teilchen im Feld eines geladenen (nicht rotierenden) schwar-

zen Loches bestimmt, lautet näherungsweise ($Q^2 \ll M^2$):

$$V_{\text{eff}}^{\pm}(r) = \frac{eQ}{r} \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \left(m^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{1/2} \quad (10.32)$$

(Q ist die totale Ladung des Schwarzen Loches)

Das effektive Potential für verschieden geladene Schwarze Löcher ist aus Fig. 5b, c ersichtlich.

Von diesen einfachen Bildern mag man folgendes lernen:

Paarbildung tritt auf im Falle eines stark geladenen Schwarzen Loches durch den Zerfall des Vakuums in Analogie zu den oben erwähnten Prozessen in der QED.

ix) Grenzladung eines Reissner - Nordström - Feldes

Sei r_+ der Ereignishorizont eines geladenen Schwarzen Loches ($r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \approx 2M$ falls $Q^2 \ll M^2$), dann tritt Paarbildung auf, falls $\frac{eQ}{r_+} \gtrsim mc^2$. Daher führt der Zerfall des Vakuums zu einem Grenzverhältnis von Ladung zu Masse eines Schwarzen Loches von 8×10^{-35} C/g.

Dieses Grenzverhältnis können wir auch so schreiben

$$\left(\frac{Ze}{M}\right) = \frac{2Gm_e^2}{e^2} \left(\frac{e}{m_e}\right) = 0,5 \times 10^{-42} \left(\frac{e}{m_e}\right), \text{ welches gerade}$$

das Verhältnis von gravitativer ($\gamma = \frac{Gm_e^2}{hc^2}$) zu elektromagnetischer Kopplungskonstante ($\alpha = \frac{e^2}{hc}$) ausdrückt.

x) Tritt das überkritische Vakuum für geladene Schwarze Löcher in der Natur heute auf?

Wir wollen uns noch überlegen, ob dieser Vakuumszerfall in der Natur wahrscheinlich ist und wie die Entladung eines Schwarzen Loches vonstatten geht. ^[52, 53]

Zunächst sollten große Überschußladungen im Kosmos keine Rolle spielen. Falls nämlich $eQ > GMm$ gilt, werden die EM-Kräfte die G - Kräfte überwiegen und ein geladenes Schwarzes Loch wird Teilchen der entgegengesetzten Ladung auf-sammeln und sich entladen. D.h. um Ladung über längere Zeit tragen zu können, muß ein Schwarzes Loch eine Masse von mehr als $M = \frac{eQ}{Gm}$ aufweisen. ($Q = e \Rightarrow M = 10^{15}g$)
Paarbildung durch das überkritisch geladene Schwarze Loch tritt auf, falls $\frac{eQ}{r_+} > mc^2$ gilt.

Wegen $\frac{GM}{c^2} \leq r_+ \leq 2\frac{GM}{c^2}$ setzen wir $r_+ \approx \frac{GM}{c^2}$, sodaß die Bedingung für Paarbildung lautet: $eQ > GMm$.

Dies war aber die Bedingung dafür, daß sich ein geladenes Schwarzes Loch durch Ansammeln von Materie aus der Umgebung entlädt.

Der Zerfall des Dirac - Vakuums im Reissner - Nordström Schwarzen Loch wird daher in der Natur unwahrscheinlich sein.

xi) Entladungsvorgang des überkritisch geladenen Schwarzen Loches, Entladungszeiten

Nehmen wir trotzdem an, ein geladenes Schwarzes Loch sitze im Vakuum, so können wir fragen, wie die Entladung im

überkritischen Fall vonstatten geht. Für ein makroskopisches Schwarzes Loch sollte man die Paarbildung mit Hilfe des Schwinger - Formalismus ^[54] beschreiben können.

Ein makroskopisches Schwarzes Loch wird nämlich einen Ereignishorizont von der Dimension km besitzen, d.h. es wird $r_+ \gg \lambda$ gelten. (λ : Comptonwellenlänge der produzierten Fermionen, im weiteren Elektronen)

Da Paarbildung im Wesentlichen nur am Ereignishorizont auftritt, können wir für den Bereich der Paarbildung das elektrostatische Feld als konstant ansehen.

Gemäß der Schwinger'schen Formel für die Paarbildung im konstanten $\vec{E}$ - Feld wird die Wahrscheinlichkeit für Paarbildung pro Zeit und Volumen durch

$$\alpha^2 \frac{E^2}{h} \exp \left(-\pi \frac{m^2 c^3}{e E \hbar} \right) \simeq W \quad (10.33)$$

gegeben sein, wenn $E = \frac{Q}{r_+^2}$ die Feldstärke des Schwarzen Loches am Ereignishorizont r_+ ist.

Der Exponentialfaktor läßt sich als

$\exp \left(-\frac{\pi}{2\alpha} \left(\frac{r_+}{\lambda} \right)^2 \right) = \exp \left(-\pi \frac{mc^2}{eE} \right)$ ($Q = Ze$) schreiben, d.h. Paarbildung wird dann (massiv) einsetzen, falls ein virtuelles Teilchen über einer Comptonwellenlänge λ durch das $\vec{E}$ - Feld die Energie einer Ruhemasse gewinnen kann. Die Entladung eines Schwarzen Loches sollte dann gemäß

$$\dot{Q} = -\alpha^2 \frac{E^2}{h} r_+^3 \exp \left(-\pi \frac{mc^2}{eE} \right) Q \quad (10.34)$$

vonstatten gehen, woraus wir eine charakteristische Entladungszeit t_c definieren können:

$$t_c = \frac{1}{Z^2 \alpha^2} \left(\frac{r_+}{c} \right) \exp \left(\frac{\pi}{Z \alpha} \left(\frac{r_+}{\lambda} \right)^2 \right) \quad (10.35)$$

Für Schwarze Löcher mit Sonnenmasse ($M = M_\odot$) und erzeugte Elektron - Positron - Paare ist $\left(\frac{r_+}{\lambda} \right) \approx 10^{31}$, $\frac{r_+}{c} = 0,5 \times 10^{-5}$ sec und damit $t_c \approx \frac{10}{Z^2} \exp \left(\frac{10^{33}}{Z} \right)$ sec. ($Q=Ze$)
D.h. (starke) Entladung tritt erst bei einer Ladung von $Q = 10^{33} e$ auf.

Nach der letzten Formel für t_c wird sich ein Schwarzes Loch mit Sonnenmasse und $Q > 10^{33} e$ explosionsartig entladen, bis $Q \approx 10^{33} e$ wird. Für $Q < 10^{33} e$ wird sich das geladene Schwarze Loch praktisch nicht mehr entladen, obwohl Paarbildung energetisch möglich ist.

Allgemein wird sich ein geladenes Schwarzes Loch im Vakuum erst bei einer Ladung von $Q > \frac{G^2 m^2}{ehc} M^2$ (stark) entladen.
(Siehe Fig. 6)

XI Äußere Torsionsfelder

Betrachten wir jetzt nur den Torsionsanteil in der Einstein - Cartan - Theorie (U_4 - Geometrie), (siehe S. 23), der Gravitation. Dazu setzen wir einfach

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1) \quad (11.1)$$

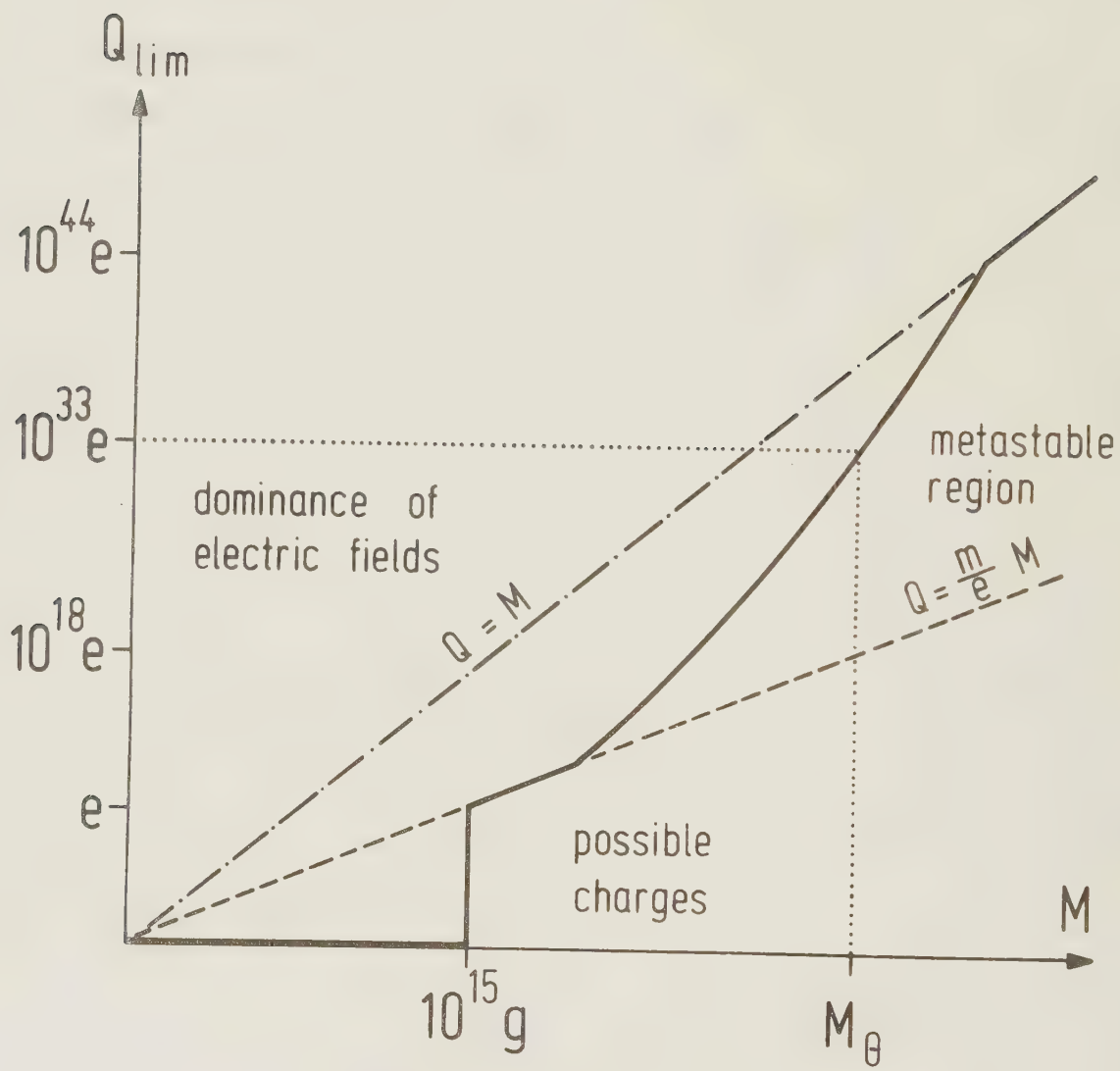


Fig.6

d.h. die U_4 - Geometrie sei flach.

Die Lagrangefunktion für das Dirac - Feld in einer U_4 - Geometrie (vgl. (5.7)) läßt sich so schreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{Dir}} = \mathcal{L}(\partial_\mu) + \frac{i}{4} \sqrt{-g} \bar{\Psi} \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^c] \Psi \Gamma_{abc} \quad (11.2)$$

und Variation des Wirkungsintegrales nach $\bar{\Psi}$ liefert

$$\left[i \gamma^\mu (\nabla_\mu + \frac{1}{2} K_{S\mu}{}^\nu) - m \right] \Psi = 0 \quad (11.3)$$

Hierbei ist $K_{S\mu}{}^\nu$ der Verdrehungstensor, welcher über

$$K_{\mu\nu}{}^\lambda = \{\overset{\lambda}{\mu\nu}\} - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \quad (11.4)$$

in der U_4 - Geometrie definiert ist.

Der Term mit dem Verdrehungstensor in Gleichung (11.3) resultiert vom Ableitungsterm von $\bar{\Psi}$ in der Lagrangefunktion (5.7) bzw. (11.2).

Wegen unserer Annahme (11.1) verschwinden die Christoffel-Symbole in der U_4 - Geometrie und das Verhalten der Dirac-Teilchen wird durch den Verdrehungstensor bestimmt.

Wegen (5.11) ist

$$K_{\alpha\beta\gamma} = -\kappa \tau_{\alpha\beta\gamma} \quad (11.5)$$

wobei $\tau_{\alpha\beta\gamma}$ die kanonische Spindichte einer Hintergrundspinverteilung ist:

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \frac{i}{4} \bar{\Psi}_{BG} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\gamma]} \Psi_{BG} \quad (11.6)$$

Ψ_{BG} sei das Hintergrundsspinfeld. Indem wir

$$S_{BG}^{\mu} = \bar{\Psi}_{BG} \gamma_5 \gamma^{\mu} \Psi_{BG} \text{ setzen, erhalten wir}$$

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} + 3\pi L_p^2 S_{BG}^{\delta}(x) \gamma_{\delta} \gamma_5 - m) \Psi = 0 \quad (11.7)$$

$$(L_p = (\frac{G\hbar}{c^3})^{1/2} = 10^{-33} \text{ cm ist die Planck - Länge})$$

i) Dirac - Gleichung im simplen Torsionsmodell

Wir nehmen an, daß S_{BG}^{δ} in der negativen z - Richtung polarisiert sei und zeitunabhängig ist, d.h. der Hintergrund sei eine Art ferromagnetische Materie.

(11.7) lautet dann in Hamilton - Form

$$H \Psi = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m + V(x) \sigma_3 \mathbb{1}) \Psi = E \Psi \quad (11.8)$$

$$\text{mit } V(x) = 3\pi L_p^2 S_{BG}^3(x).$$

Wegen der Polarisation des Hintergrundes ist $V(x) < 0$ und Teilchen mit Spin rauf werden angezogen, wogegen solche mit Spin runter abgestoßen werden.

Versucht man, die Dirac - Gleichung (11.8) zu lösen, so begegnet man folgenden Schwierigkeiten:

Aufgrund der Dynamik enthält eine Wellenfunktion Ψ eines gebundenen Zustandes stets beide Spinanteile.

(Falls ein geladenes Teilchen P sich in x - oder y - Richtung bewegt, so produziert es ein Magnetfeld in z - Richtung. Daher ist der Spin von P keine gute Quantenzahl.) Deshalb spürt ein gebundenes Teilchen im Torsionsfeld eine repulsive Wechselwirkung, welche ungefähr proportional zur kinetischen Energie anwächst.

Daher erwarten wir, daß Energieeigenwerte das negative Energiekontinuum höchstens dann erreichen können, falls $\langle E_{\text{kin}} \rangle \ll \langle |V| \rangle$ mit steigendem $\langle |V| \rangle$.

Wegen des Virialsatzes wird dies im Rechteckpotential der Fall sein, wogegen in sigulären Potentialen wie dem $\frac{1}{r}$ Potential das Dirac - Vakuum stabil sein könnte.

Um diese Schwierigkeiten, die durch den repulsiven Teil der Wechselwirkung resultieren, zu umgehen, betrachten wir Gleichung (11.8) zunächst nur in zwei Raum - Zeit - Dimensionen. Für diesen Fall besitzt ein gebundenes Teilchen einen wohldefinierten "Spin". Später werden wir sehen, daß sich qualitativ nichts wesentlich ändert, wenn wir das Rechteckpotential in vier Raum - Zeit - Dimensionen betrachten.

In der (t, z) Ebene ist $\psi = \begin{pmatrix} i g(z) \\ 0 \\ f(z) \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenspinor zu H und

die Dirac - Gleichung lautet

$$f' = [m - (E - V)] g$$

$$g' = [m + (E - V)] f \quad (11.9)$$

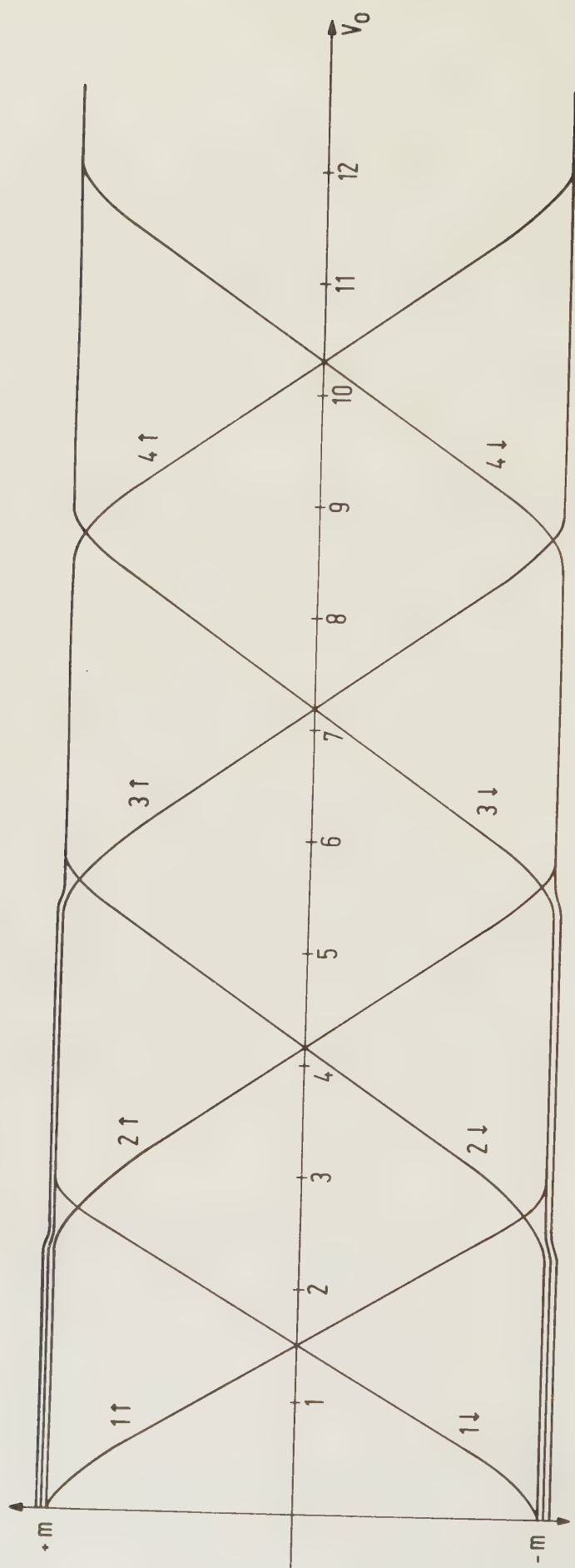


Fig.7

Für das Rechteckpotential

$$V(z) = \begin{cases} -V_0 & z \leq z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (11.10)$$

findet man folgende Bedingung für einen Energieeigenwert:

$$\sqrt{\frac{E + V_0 - m}{E + V_0 + m}} \tan(z_0 \sqrt{(E + V_0)^2 - m^2}) = \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} \quad (11.11)$$

Man sieht sofort, daß sich gebundene Zustände bei $(E = +m)$

$$V_0 = -m + \sqrt{m^2 + \left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (11.12a)$$

ausbilden. Das negative Energiekontinuum wird erreicht bei $(E = -m)$

$$V_0 = +m + \sqrt{m^2 + \left(\frac{k\pi}{2z_0}\right)^2} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (11.12b)$$

Fig. 7 zeigt die ersten vier gebundenen Zustände für dieses einfache Torsionsmodell ($z_0 = m^{-1}$).

Wir sehen, daß das isotope Vakuum zerfällt, da gebundene Zustände mit Spin rauf in das untere Kontinuum eintauchen, welches den gleichen Spin trägt.

War der ursprüngliche Zustand leer, so wird er im überkritischen Feld gefüllt, wogegen das resultierende Loch im Dirac - See als Antiteilchen mit Spin runter ins Unendliche entweicht. Der dann resultierende Grundzustand enthält

einen nichtverschwindenden Spin und ist deshalb nicht länger isotrop.

ii) Statistische Behandlung des Vakuums mit Spin

In vier Raum - Zeit - Dimensionen mag man die Änderung des Grundzustandes selbstkonsistent durch ein statistisches Modell beschreiben. [22]

In einem schwach veränderlichen Hintergrundfeld betrachten wir ebene Wellen mit Spin rauf als Testfunktionen:

$$\Psi_{\vec{p}}^{\uparrow}(t, \vec{x}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/E+m \\ p_+/E+m \end{pmatrix} \text{ mit } p_+ = p_x + ip_y \text{ und } E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

In der Thomas - Fermi - Näherung ist die Energie gegeben durch

$$E^{\text{up}}(\vec{p}) = \langle \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} | H | \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} \rangle = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + V(r) \langle \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} | \sigma_3 | \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} \rangle \quad (11.13)$$

$$\text{mit } \langle \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} | \sigma_3 | \Psi_{\vec{p}}^{\text{up}} \rangle = 1 - \frac{p_{\perp}^2}{E(E+m)} \quad (p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2) \quad (11.14)$$

Den Vakuumszustand des Systems definieren wir uns über

$E_F = -m$, d.h. Zustände mit $E > E_F$ sollen leer sein, Zu-

stände mit $E = E_F$ aufgefüllt. Die Anzahl von Teilchen, welche das überkritische Vakuum enthält, ist dann gegeben durch

$$N_{\text{occ}} = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(E_F - E(\vec{p})) = \frac{2}{(2\pi)^3} \mathcal{V} \quad (11.15)$$

(Der Faktor zwei kommt dadurch zustande, daß Teilchen und Antiteilchen gleichermaßen produziert werden.)

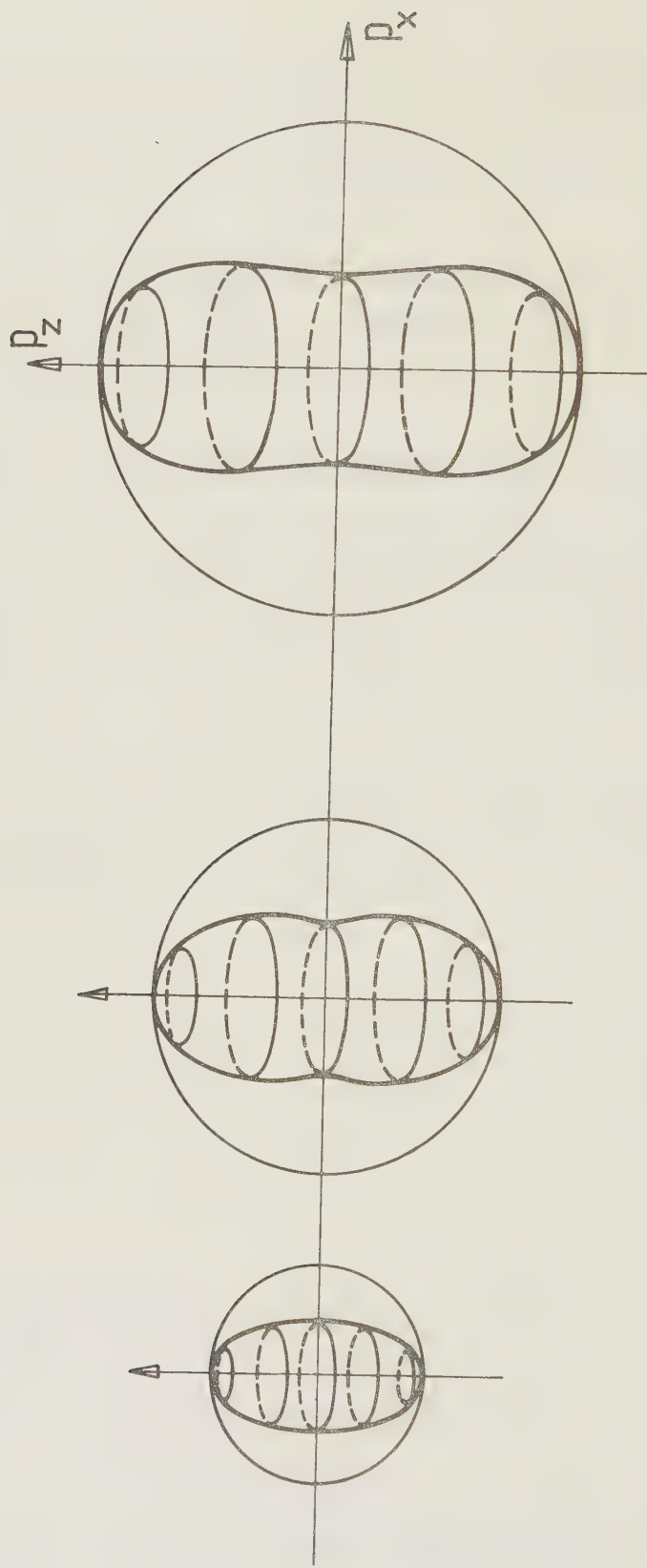
Hier bedeutet $\mathcal{V}$ das Volumen, welches von der Fermi - Fläche $\mathcal{F}$ *) im Impulsraum eingeschlossen wird. ist gegeben durch

$$E_F^{\text{up}}(\vec{p}) = -m = \sqrt{\vec{p}_F^2 + m^2} + V(r) - \frac{V(r) \vec{p}_F^2 \sin^2 \Theta}{\vec{p}_F^2 + m^2 + m \sqrt{\vec{p}_F^2 + m^2}} \quad (11.16)$$

Hier ist Θ der Winkel zwischen $\vec{p}_F$ und der Polarisation des Hintergrundes. Fig. 8 (a - c) zeigt die Fermi - Fläche $\mathcal{F}$ für $V = -3m, -4m$ und $-5m$.

Man kann an der Figur erkennen, wie der repulsive Teil der Wechselwirkung die Anzahl überkritischer Teilchen mit großem Impuls in x, y - Richtung reduziert. Da die Torsion in der U_4 - Theorie durch eine Kontaktwechselwirkung beschrieben wird, ist die selbstkonsistente Thomas - Fermi -

*) Für $V = \text{const.}$ ist $\mathcal{F}$ üblicherweise eine Kugel mit Radius $r_F = ((E - V)^2 - m^2)^{1/2}$.



$$V_0 = -3m$$

$$V_0 = -4m$$

$$V_0 = -5m$$

Fig. 8

Gleichung keine Differentialgleichung sondern eine algebraische:

$$V = -V_0 + 3\pi L_p^2 \mathcal{S}_{\text{ind.}} \quad (11.17)$$

$$\text{mit } \mathcal{S}_{\text{total}} = \mathcal{S}_{\text{BG}} + \mathcal{S}_{\text{ind}} \quad (11.18a)$$

$$\mathcal{S}_{\text{ind}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (1 - \frac{p^2}{E(E+m)}) \Theta(E_F - E(p)) \quad (11.18b)$$

$$V = 3\pi L_p^2 \mathcal{S}_{\text{total}} \quad (11.18c)$$

$$V_0 = 3\pi L_p^2 |\mathcal{S}_{\text{BG}}| \quad (11.18d)$$

Fig. 9 zeigt die selbstkonsistente Behandlung des überkritischen Vakuums in der U_4 - Theorie.

Für ein Rechteckpotential mit $R_0 = .5 \text{ m}^{-1}$ ist die Gesamtzahl der Teilchen mit Spin runter gegen die Anzahl der nackten Hintergrundspins aufgetragen. (Ein Teil des Hintergrundes wird durch den Spin des überkritischen Vakuums abgeschirmt.)

Man sieht: Eine neue Art von Dirac - Vakuum existiert in der Einstein - Cartan - Theorie der Gravitation: Das Vakuum mit Spin.

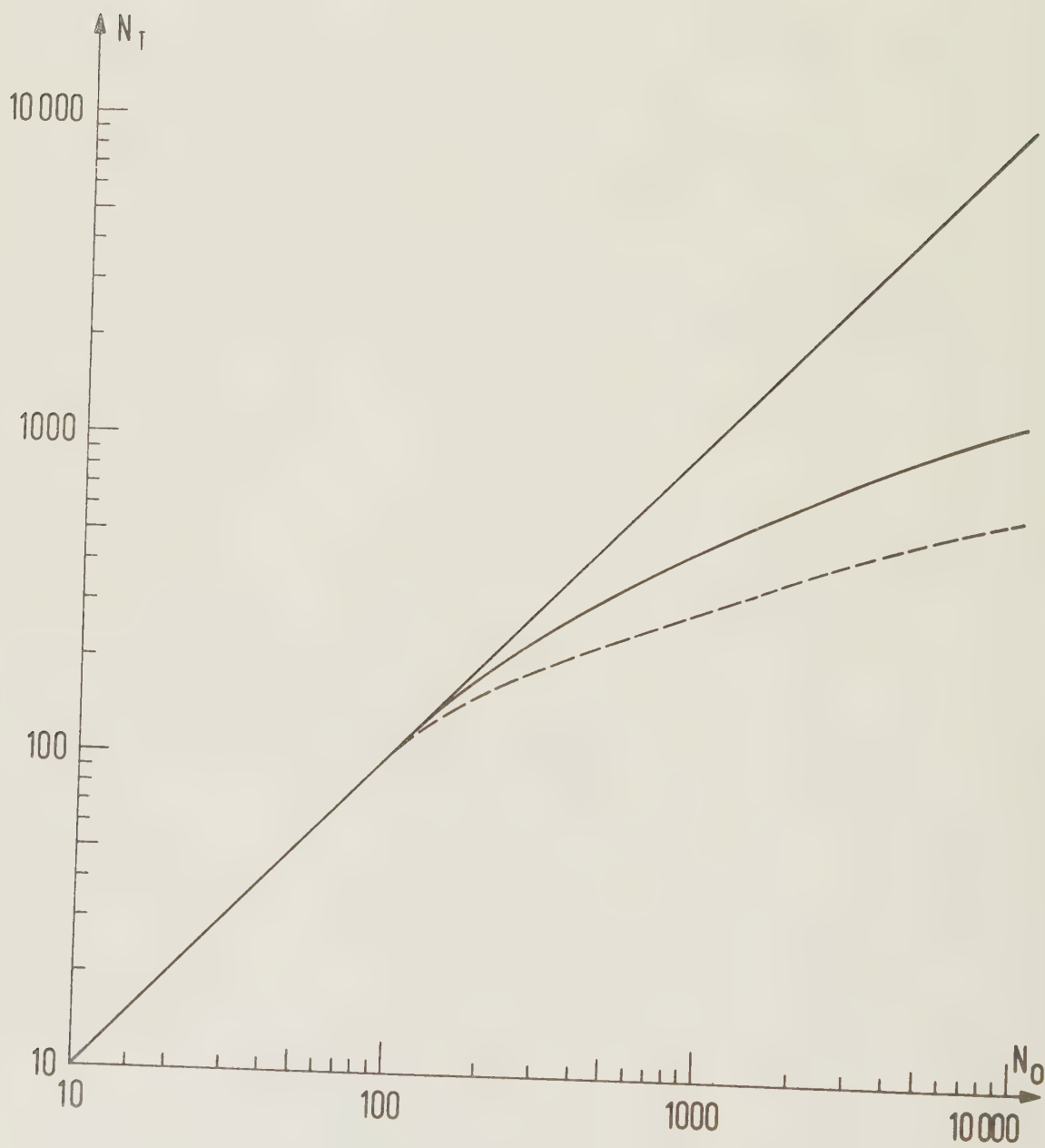


Fig.9

iii) Tritt das Vakuum mit Spin in der Natur auf?

Die überkritische Situation tritt jedoch nur für extrem große Werte von polarisierter Spindichte auf (10^{48} g / cm³ für polarisierte Elektronen), sodaß das Vakuum mit Spin höchstens in der frühesten Big Bang - Phase unseres Kosmos oder in der Endphase des Gravitationskollaps eine Rolle spielen könnte.

Man beobachte hierbei, daß Effekte der Quantengravitation erst bei Dichten von der Ordnung der Planck - Dichte

$$\rho_p = \frac{c^5}{\hbar G^2} = 10^{94} \text{ g / cm}^3 \text{ eine Rolle spielen sollten.}$$

XII Dirac - Teilchen im Rindler - Raum

i) Der gleichförmig beschleunigte Beobachter und Rindler - Raum

Wir wollen die Frage behandeln: Was sieht ein gleichförmig beschleunigter Beobachter mit seinem Detektor im Minkowski Raum, wenn wir annehmen, das System befinde sich im Minkowski - Vakuum?

Wir beschränken uns dazu auf den 2 - dimensionalen Minkowski -Raum $\mathcal{M}$ mit Koordinaten (t, z) .

In diesem leitet sich die Bewegungsgleichung eines gleichförmig beschleunigten Beobachters ab aus

$$u^\mu u_\mu = -1 = u^0 u_0 - u^3 u_3 \quad (12.1a)$$

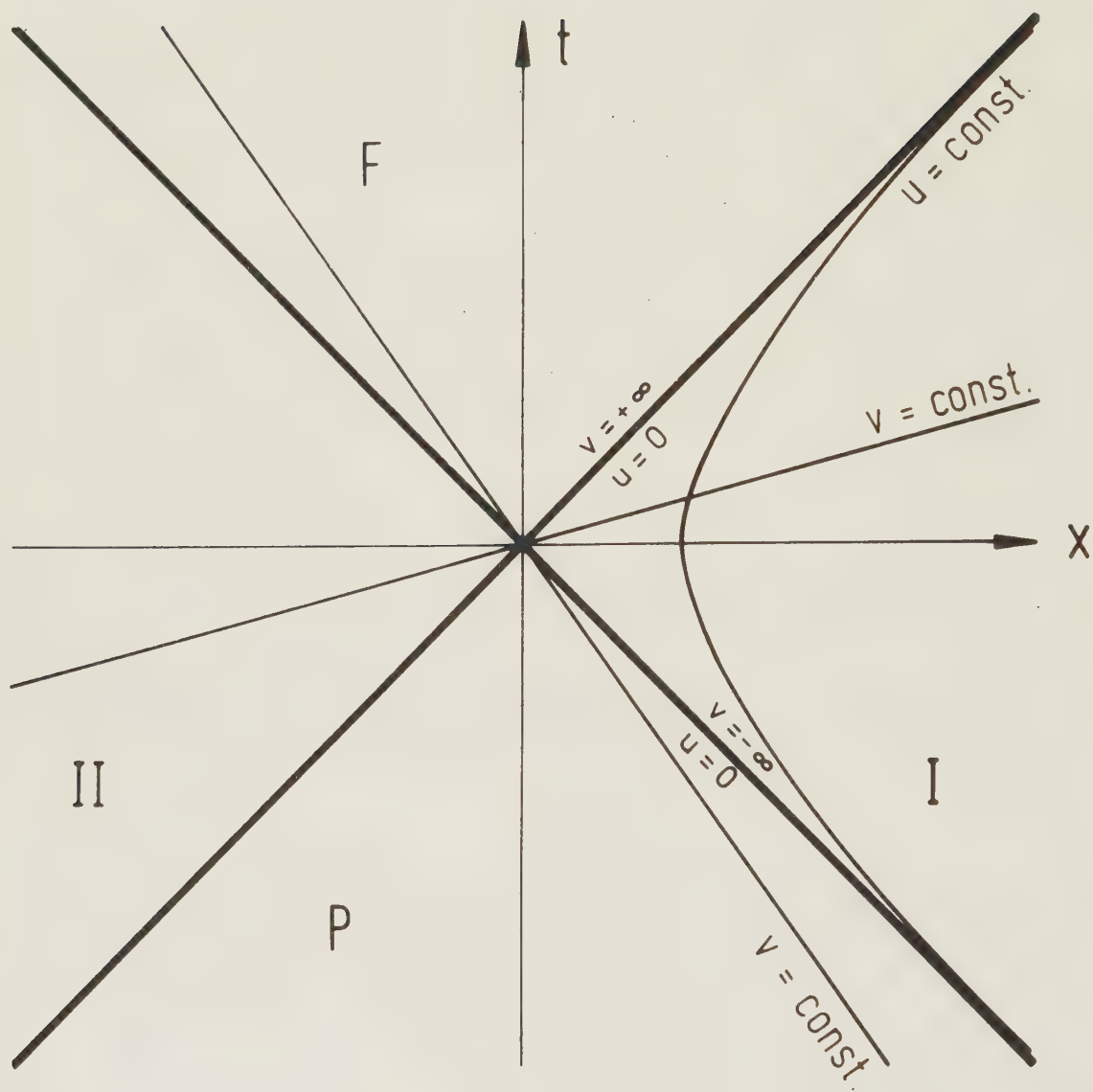


Fig.10

$$u^\mu a_\mu = 0 = u^0 a_0 - u^3 a_3 \quad (12.1b)$$

$$a^\mu a_\mu = g^2 = a^0 a_0 - a^3 a_3 \quad (12.1c)$$

wobei $u^\mu = (\frac{dt}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau})$ die Vierergeschwindigkeit des Beobachters B ist, a^μ ist dessen Viererbeschleunigung und τ dessen Eigenzeit. g ist dann die konstante Beschleunigung von B, gemessen in einem instantanen Ruhesystem (Inertialsystem) von B.

Gleichung (12.1 a - c) lösen wir algebraisch auf nach a^0 und a^3 und erhalten

$$a^0 = g u^3 = \frac{du^0}{d\tau} \quad a^3 = g u^0 = \frac{du^3}{d\tau} \quad (12.2)$$

Aus (12.2) erhält man sofort

$$t = g^{-1} \operatorname{sh} g\tau, \quad z = g^{-1} \operatorname{ch} g\tau \quad (12.3)$$

B bewegt sich also auf einer Hyperbel in $\mathcal{M}$ (siehe Figur 10):

$$z^2 - t^2 = a^2 \quad (a \equiv g^{-1}) \quad (12.4)$$

Man spricht daher häufig davon, der gleichförmig beschleunigte Beobachter bewege sich hyperbolisch oder sei in einer hyperbolischen Bewegung.

Wie man Fig. 10 entnimmt, zerlegt die Dynamik von B den Minkowski - Raum in vier Segmente: I (rechts), II (links), F (future) und P (past).

Wir können nun mit dem Beobachter B mitbewegte Koordinaten (v, u) definieren gemäß [1]

$$(v = g \tau)$$

$$\begin{aligned} t &= u \operatorname{sh} v & z &= u \operatorname{ch} v \\ v &= \operatorname{arth}(t/z) & u &= \operatorname{sgn} z \sqrt{z^2 - t^2} \quad \text{in I, II} \end{aligned} \quad (12.5a)$$

$$\begin{aligned} t &= u \operatorname{ch} v & z &= u \operatorname{sh} v \\ v &= \operatorname{arth}(z/t) & u &= \operatorname{sgn} t \sqrt{t^2 - z^2} \quad \text{in F, P} \end{aligned} \quad (12.5b)$$

Man sieht, daß B sich einfach auf der Trajektorie $u = g^{-1}$ im Sektor $I \subset \mathcal{M}$ bewegt. Kurven zu $u = \text{const.}$ sind Hyperbeln, solche mit $v = \text{const.}$ sind Geraden durch den Ursprung 0 von $\mathcal{M}$ (s. Fig. 10).

Man beachte: In $I \cup II$ ist v die zeitartige Koordinate und u die raumartige.

Das umgekehrte Verhalten von u und v findet man in den Sektoren F und P. Die Sektoren I und II heißen Rindler - Raum $\mathcal{M}_R \subset \mathcal{M}$ [59].

Wir nehmen für das Weitere immer an, daß sich die Trajektorie von B in $I \subset \mathcal{M}_R$ befindet.

Das Minkowski-Linienelement

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 \quad (12.6)$$

lautet in den neuen Koordinaten

$$ds^2 = u^2 dv - du^2 \quad \text{in } I \cup II \quad (12.7a)$$

$$= du^2 - u^2 dv^2 \quad \text{in } F \cup P \quad (12.7b)$$

ii) Lösung der Dirac - Gleichung in den vier Sektoren des
Minkowski - Raumes

Wir wollen nun die Dirac - Gleichung

$$[i \gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m] \psi = 0 \quad (12.8)$$

in den vier Sektoren von $\mathcal{M}$ betrachten. ^[51] Betrachten wir
zunächst Sektor $I \subset \mathcal{M}_R$.

Die Bispinorübertragung lautet hier

$$\Gamma_\mu = (-\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3, 0) \quad (12.9)$$

und Gleichung (12.8) lautet damit

$$i \frac{\partial}{\partial v} \psi = u \left[-i \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2u} \right) + \beta_m \right] \psi \quad (12.10)$$

oder mit $\tilde{\psi} = u^{1/2} \psi$ einfach

$$i \frac{\partial}{\partial v} \tilde{\psi} = u \left[-i \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u} + \beta_m \right] \tilde{\psi} \equiv \hat{H}_R \tilde{\psi} \quad (12.11)$$

Wir lösen Gleichung (12.10) mit dem Ansatz

$$\Psi(v, u) = e^{-i\omega v} \Psi(u).$$

(Wir verwenden die Bjorken - Drell - Darstellung der γ_{μ} - Matrizen:)

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für Spin rauf Zustände schreiben wir

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} \varphi_1 - \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{(\omega + \frac{i}{2})}{u} \varphi_1 &= -i \varphi_1' - m \varphi_2 \\ \frac{(\omega - \frac{i}{2})}{u} \varphi_2 &= i \varphi_2' - m \varphi_1 \end{aligned} \quad (12.13)$$

d.h. es gilt:

$$\varphi_2 = \left[\frac{d}{dx} - \frac{v}{x} \right] \varphi_1 \quad \text{mit } v = i\omega - \frac{1}{2}, \quad x = iu \quad (12.14)$$

Sei $\phi_{\omega}^{-} \equiv \varphi_1(\omega)$; aus (12.13) ergibt sich dann

$$\left(u \frac{d}{du} + u \frac{d}{du} \right) \phi_{\omega}^{-} = \left[m^2 u^2 - \left(\omega + \frac{i}{2} \right)^2 \right] \phi_{\omega}^{-} \quad (12.15)$$

Die normierbare Lösung dieser Bessel'schen Differential-

gleichung ist dann:

$$\phi_{\omega}^{-} = H_{i\omega - 1/2}^{(1)}(iu) \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (12.16)$$

Aus Gleichung (12.14) ergibt sich dann:

$$\psi_2 = -H_{i\omega + 1/2}^{(1)}(iu) \equiv -\phi_{\omega}^{+} \quad (12.17)$$

Wir bemerken, daß auf der reellen Achse gilt:

$$\psi_2 = \psi_1^* \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (12.18)$$

denn wegen

$$\left[H_{\nu}^{(1)}(z) \right]^* = H_{\nu}^{(2)}(z^*) \quad (12.19a)$$

und

$$H_{\nu}^{(2)}(ze^{-\pi i}) = -e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) \quad (12.19b)$$

ist

$$H_{i\omega - 1/2}^{(1)}(iu) = -H_{i\omega + 1/2}^{(1)}(iu) \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (12.20)$$

Wir wollen die Wellenfunktion ψ_{ω} auf $\mathcal{S}$ -Distributionen normieren.

Das hyperflächenunabhängige Dirac'sche Skalarprodukt war durch

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\Sigma} d\sigma^{\mu} \bar{\psi}_1 \gamma^{\mu} \psi_2 \quad (12.21)$$

gegeben.

Als Hyperfläche Σ wählen wir eine $v = \text{const.}$ Linie aus.

$d\sigma_\mu = (d\sigma_0, 0)$ ist dann einfach der Ortszuwachs du , und u läuft in $I \subset \mathcal{M}$ von 0 bis ∞ .

Also ist

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega'}) = \int_0^\infty du \psi_\omega^\dagger \psi_{\omega'} \quad (12.22a)$$

Zur Berechnung eines solchen Integrales bedienen wir uns der Dirac - Gleichung (12.11). Aus ihr folgt

$$\tilde{\psi}_\omega^\dagger \frac{\omega'}{u} \tilde{\psi}_{\omega'} = \tilde{\psi}_\omega^\dagger [-i\alpha_3 \frac{\partial}{\partial u} + \beta m] \tilde{\psi}_{\omega'}$$

$$\tilde{\psi}_{\omega'} \frac{\omega}{u} \tilde{\psi}_\omega^\dagger = \tilde{\psi}_{\omega'} [+i\alpha_3 \frac{\partial}{\partial u} + \beta m] \tilde{\psi}_\omega^\dagger$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty du \psi_\omega^\dagger \psi_{\omega'} &= \int_0^\infty \frac{du}{u} \tilde{\psi}_\omega^\dagger \tilde{\psi}_{\omega'} = \frac{i}{\omega - \omega'} \int_0^\infty du [\tilde{\psi}_{\omega'} \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\psi}_\omega^\dagger \\ &+ \tilde{\psi}_\omega \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\psi}_{\omega'}] = \frac{i}{\omega - \omega'} \tilde{\psi}_\omega^\dagger \alpha_3 \tilde{\psi}_{\omega'} \Big|_0^\infty = \frac{i u}{\omega - \omega'} \psi_\omega^\dagger \alpha_3 \psi_{\omega'} \Big|_0^\infty \end{aligned} \quad (12.22b)$$

Wir erhalten

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega'}) = \int_0^\infty du \psi_\omega^\dagger \psi_{\omega'} = \frac{i u}{\omega - \omega'} \psi_\omega^\dagger \alpha_3 \psi_{\omega'} \Big|_0^\infty \quad (12.23)$$

wegen

$$\varphi_1(\omega) \xrightarrow{|u| \rightarrow 0} \frac{e}{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - i\omega) \sqrt{\frac{2}{i m u}} e^{i\omega \ln \frac{m u}{2}} \quad (12.24a)$$

$$\varphi_1(\omega) \xrightarrow{|u| \rightarrow \infty} e^{\pi\omega/2} e^{-m u} \sqrt{\frac{2}{i\pi m u}} \quad (12.24b)$$

tragen die Oberflächenterme bei $|u| \rightarrow \infty$ nichts bei und man erhält:

$$(\psi_\omega, \psi_{\omega'}) = \frac{2iu}{\omega - \omega'} \left[\varphi_1(\omega) \varphi_1^*(\omega') - \varphi_1^*(\omega) \varphi_1(\omega') \right]_0 = \frac{2 e^{\pi\omega}}{m \operatorname{ch} \pi\omega} \delta(\omega - \omega') \quad (12.25)$$

wobei wir $\Gamma(\frac{1}{2} - i\omega) \Gamma(\frac{1}{2} + i\omega) = |\Gamma(\frac{1}{2} + i\omega)|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\omega)}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{x} = \pi \delta(x)$ benutzten. Wir geben im Weiteren der Wellenfunktion ψ_ω einen Index I, um daran zu erinnern, daß I $\subset \mathcal{M}$ der Träger von ${}^I\psi_\omega$ ist.

iii) Das Zusammenbrechen des Energiegaps für den beschleunigten Beobachter

Das Spektrum des Dirac - Operators in I (H ist hier zeitunabhängig) ist hier gleich $\mathbb{R}$ (s.(12.16)).

Der beschleunigte Beobachter wird Teilchen (Antiteilchen) nach seiner Eigenzeit τ klassifizieren, d.h. nach dem Vorzeichen von ω .

Wir gewinnen dann folgendes Bild:

Aufgrund der Dynamik von B besitzt dieser einen zukünftigen Ereignishorizont (s. Fig. 10). Dieser bewirkt eine effektive Rotverschiebung von $e^{\sqrt{2}} = u$ mit $u \rightarrow 0$ (Ereignishorizont) aller Spektrallinien, die ein inertialer Beobachter sähe (Gleichung (12.11)).

Der scheinbare Ereignishorizont bewirkt also ein Zusammenbrechen des Energiegaps zwischen "Teilchen" und "Antiteilchenzuständen".

Im Sektor F des Minkowski - Raumes erhält man aus

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^\nu (\gamma_{\nu\mu} - \{\gamma_\mu^\lambda\} \gamma_\lambda) \quad (\text{Gleichung (10.3)})$$

$$\Gamma_\mu = (0, -\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3) \quad (12.26)$$

und die Dirac - Gleichung lautet jetzt

$$i \frac{\partial}{\partial v} \psi = u \left[-i \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2u} \right) + \gamma_3 m \right] \psi \quad (12.27)$$

Mit $\psi = e^{-i\omega v} \varphi(u)$ und Ansatz (12.12) erhält man

$$\frac{(\omega + \frac{i}{2})}{u} \varphi_1 = -i \varphi_1' - m \varphi_2 \quad (12.28)$$

$$\frac{(\omega - \frac{i}{2})}{u} \varphi_2 = i \varphi_2' + m \varphi_1$$

und damit

$$i \varphi_2 = \left[\frac{d}{dx} - \frac{v}{x} \right] \varphi_1 \quad \text{mit } v = i\omega - \frac{1}{2}, x = mu \quad (12.29)$$

Aus (12.28) ergibt sich:

$$(u \frac{d}{du} + u \frac{d}{du}) \varphi_1 = - \left[m^2 u^2 + \left(\omega + \frac{i}{2} \right)^2 \right] \varphi_1 \quad (12.30)$$

woraus wir schließen:

$$\varphi_1 = H_{i\omega - 1/2}^{(1)}(\mu) \quad (12.31)$$

Wegen (12.29) gilt dann

$$\varphi_2 = i H_{i\omega + 1/2}^{(1)}(\mu) \quad (12.32)$$

denn es ist

$$H_{\nu}^{(1)}(x) - \frac{\nu}{x} H_{\nu}^{(1)}(x) = -H_{\nu+1}^{(1)}(x) \quad (12.33)$$

Wir schreiben also:

$${}^F\psi_{\omega}(\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_{\omega}^{-} & -i\varphi_{\omega}^{+} \\ 0 & \\ \varphi_{\omega}^{-} & +i\varphi_{\omega}^{+} \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \varphi_{\omega}^{\pm} = H_{i\omega \pm 1/2}^{(1)}(\mu) \quad (12.34)$$

Den Betrag von ${}^F\psi_{\omega}$ erhält man so:

$$\begin{aligned} ({}^F\psi_{\omega}, {}^F\psi_{\omega'}) &= \mu \psi_{\omega}^{\dagger}(\mu) \psi_{\omega'}(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{i(\omega-\omega')v} \\ &= 2\pi\mu \delta(\omega-\omega') \psi_{\omega}^{\dagger}(\mu) \psi_{\omega'}(\mu) \\ &= 4\pi\mu \delta(\omega-\omega') \left[H_{+}^{(1)} H_{+}^{*(1)} + H_{-}^{(1)} H_{-}^{*(1)} \right] \end{aligned} \quad (12.35)$$

(Das Argument der Hankel - Funktion ist μ und der Index $\pm$ bedeutet $i\omega \pm 1/2$)

Wegen

$$H_-^* (1) = -i e^{\pi \omega} H_+ (2)$$

$$H_+^* (1) = +i e^{\pi \omega} H_- (2) \quad (12.36)$$

ergibt sich: $v \equiv i\omega - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} ({}^F \psi_\omega, {}^F \psi_{\omega'}) &= 4\pi i u \delta(\omega - \omega') e^{\pi \omega} [H_{v+1}^{(1)} H_v^{(2)} - H_v^{(1)} H_{v+1}^{(2)}] \\ &= 4\pi i u \delta(\omega - \omega') e^{\pi \omega} W\{H_v^{(1)}, H_v^{(2)}\} = \frac{16 e^{\pi \omega}}{m} \delta(\omega - \omega') \quad (12.37) \end{aligned}$$

da die Wronski - Determinante $W\{H_v^{(1)}(\mu), H_v^{(2)}(\mu)\}$ gegeben ist durch

$$W\{H_v^{(1)}(\mu), H_v^{(2)}(\mu)\} = -\frac{4i}{\pi \mu} \quad (12.38)$$

Für das Weitere versehen wir ${}^F \psi_\omega$ noch mit einem Index (-) und schreiben ${}^F \psi_\omega^{(-)}$

$${}^F \psi_\omega^{(-)} = e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} \varphi_\omega^- - i \varphi_\omega^+ \\ 0 \\ \varphi_\omega^- + i \varphi_\omega^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.39)$$

Nun ist im Sektor F v eine raumartige Koordinate und ω hat hier physikalisch die Bedeutung eines Impulses.

Das Vorzeichen von ω kann also hier nicht zwischen Teilchen und Antiteilchencharakter der Wellenfunktion unter-

scheiden. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß man in F noch eine Weitere, von $\Psi_\omega^{(-)}$ unabhängige Wellenfunktion für beliebiges $\omega \in \mathbb{R}$ findet:

$$\varphi_1 = H_{i\omega - 1/2}^{(2)}(mu) \quad (12.40)$$

löst nämlich genauso gut die Gleichung (12.30). Wegen (12.29) ist dann

$$\varphi_2 = i H_{i\omega - 1/2}^{(2)}(mu) \quad (12.41)$$

und wir schreiben

$$F \Psi_\omega^{(+)} = e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_\omega^- & -i \tilde{\varphi}_\omega^+ \\ 0 & \tilde{\varphi}_\omega^- + i \tilde{\varphi}_\omega^+ \\ \tilde{\varphi}_\omega^- & +i \tilde{\varphi}_\omega^+ \\ 0 & \end{pmatrix} \tilde{\varphi}_\omega^\pm = H_{i\omega \pm 1/2}^{(2)}(mu) \quad (12.42)$$

Wir bemerken, daß auf der reellen u - Achse gilt:

$$F \Psi_\omega^{(+)} = e^{-\pi u} e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} \varphi_\omega^- & -i \varphi_\omega^+ \\ 0 & \varphi_\omega^- + i \varphi_\omega^+ \\ -\varphi_\omega^- & -i \varphi_\omega^+ \\ 0 & \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R}) \quad (12.43)$$

Wir berechnen die Norm von $F \Psi_\omega^{(+)}$:

$$\begin{aligned} (F \Psi_\omega^{(+)}, F \Psi_{\omega'}^{(+)}) &= 4\pi u \delta(\omega - \omega') \left[H_+^{(2)} H_+^{*(2)} + H_-^{(2)} H_-^{*(2)} \right] \\ &= \frac{16 e^{-\pi u}}{m} \delta(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (12.44)$$

wobei wir benutzen

$$H_+^* (2) = -i e^{-\pi\omega} H_- (1) \quad (12.45a)$$

$$H_-^* (2) = +i e^{-\pi\omega} H_+ (1) \quad (12.45b)$$

$$H_{-\nu} (2) (z) = e^{-\nu\pi i} H_{\nu} (2) (z) \quad (12.45c)$$

Man rechnet sofort nach

$$(\mathcal{F}\psi_{\omega}^{(\pm)}, \mathcal{F}\psi_{\omega'}^{(\mp)}) = 0 \quad (12.46)$$

Wellenfunktionen in II und P definieren wir uns durch Spiegelung:

$$\mathbb{I}\psi_{\omega}(t, z) = \alpha_3 \mathbb{I}\psi_{\omega}(-t, -z) \quad \mathbb{P}\psi_{\omega}^{(\pm)}(t, z) = \alpha_3 \mathcal{F}\psi_{\omega}^{(\pm)}(-t, -z) \quad (12.47)$$

In der Tat erfüllen die Wellenfunktionen (12.47) die Dirac - Gleichung in den jeweiligen Sektoren in genau der gleichen Darstellung der γ^{μ} - Matrizen wie in den gespiegelten Sektoren.

Der Übergang $(t, z) \rightarrow (-t, -z)$ bewirkt nämlich $(v, u) \rightarrow (v, -u) = (v, \tilde{u})$ und die Dirac - Gleichung etwa im Sektor II läßt sich schreiben als

$$\omega \psi(\tilde{u}) = \tilde{u} \left[-i\alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} + \frac{1}{2\tilde{u}} \right) - \beta_m \right] \psi(\tilde{u}) \quad (12.48)$$

und $\mathbb{I}\psi(v, u) = \alpha_3 \mathbb{I}\psi_{\omega}(v, \tilde{u})$ erfüllt diese Gleichung.

Analoges gilt für die übrigen Wellenfunktionen in (12.47).

iv) Konstruktion einer Quantenfeldtheorie mit Hilfe der
Rindler - Moden

Wir können nun eine Quantenfeldtheorie im Minkowski - Raum (es stellt sich heraus, daß dies die übliche Quantenfeldtheorie des Dirac - Feldes ist) dadurch erhalten, daß wir mit Hilfe der I, II ψ_ω und $\bar{F}^P \psi_\omega^{(\pm)}$ Teilchen - (Antiteilchen) Wellenfunktion der Dirac - Gleichung im vollen Minkowski - Raum (incl. sämtlicher Lichtkegel) konstruieren.

Der Rumpf'schen Definition (vgl. S. 29) entnimmt man, daß Teilchen - (Antiteilchen) Wellenfunktionen so aussehen:

$$\psi_\omega^+ = N (a_1^I \psi_\omega + a_2^F \psi_\omega^{(+)} + a_3^P \psi_\omega^{(-)} + a_4^{\bar{I}} \psi_\omega) \quad (12.49a)$$

$$\psi_\omega^- = N' (b_1^I \psi_\omega + b_2^F \psi_\omega^{(-)} + b_3^P \psi_\omega^{(+)} + b_4^{\bar{I}} \psi_\omega) \quad (12.49b)$$

Wegen $H_\nu^{(1)}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$ (12.50)

gilt z.B. $\varphi_\omega^\pm \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi m u}} e^{imu} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(i\omega \pm \frac{1}{2}))}$ (12.51)

d.h. für $m \rightarrow m^{(\pm)} i \in (\mathbb{R}^+)$ divergiert (konvergiert)

$\varphi_\omega^\pm$ für große Zeiten u .

Deswegen ist $\bar{F} \psi_\omega^{(-)}$ z.B. regulär in F bis auf die Zukunft, falls m^2 einen negativen Imaginärteil trägt, also Teil einer Antiteilchenmode.

Die Konstanten a_i (b_i) in (12.49) bestimmen sich dabei aus der Bedingung, daß $\psi_\omega^{(\pm)}$ Lösung der Dirac - Gleichung im vollen Minkowski - Raum sein soll (incl. der Lichtkegel).

Nun sind die einzelnen Teilwellenfunktionen $I, II \psi_\omega$, $F, P \psi_\omega^{(\pm)}$ nicht Lösung der Dirac - Gleichung im vollen Minkowski - Raum, sondern weisen Distributionen als Quellterme auf dem Lichtkegel durch 0 auf.

Dies ist aus Folgendem ersichtlich:

$$\begin{aligned} I \psi &= I \psi \theta(z+t) \theta(z-t) & II \psi &= II \psi \theta(-z-t) \theta(t-z) \\ F \psi &= F \psi \theta(z+t) \theta(t-z) & P \psi &= P \psi \theta(-z-t) \theta(z-t) \end{aligned} \quad (12.52)$$

So besagen etwa die θ - Funktionen $\theta(z+t) \cdot \theta(z-t)$ bei $I \psi$, daß $I \psi$ außerhalb von Sektor I verschwindet.

Wir können also die Konstanten a_i (b_i) dadurch bestimmen, daß wir fordern, daß sich Quellterme auf dem Lichtkegel in den Wellenfunktionen der angrenzenden Sektoren exakt wegheben. Dies ist in Anhang B ausgeführt.

Man erhält die normierten Wellenfunktionen

$$\psi_\omega^+ = \sqrt{\frac{m}{48}} \left(I \psi_\omega - e^{+\pi\omega/2} F \psi_\omega^{(+)} + e^{-\pi\omega/2} P \psi_\omega^{(-)} - i e^{-\pi\omega} II \psi_\omega \right) \quad (12.53)$$

$$\psi_\omega^- = \sqrt{\frac{m}{48}} \left(e^{-\pi\omega} I \psi_\omega + e^{-\pi\omega/2} F \psi_\omega^{(-)} + e^{+\pi\omega/2} P \psi_\omega^{(+)} + i II \psi_\omega \right) \quad (12.54)$$

(Auf Darstellungsprobleme, die mit der Konstruktion von $\psi^{(\pm)}$ verknüpft sind, gehen wir später noch ein.)

Man rechnet sofort nach

$$(\psi_{\omega}^{+}, \psi_{\omega'}^{-}) = 0 \quad (\psi_{\omega}^{\dagger}, \psi_{\omega'}^{\dagger}) = \delta(\omega - \omega') \quad (12.55)$$

Eine Quantenfeldtheorie auf $\mathcal{M}$ kann man durch folgende Spektralzerlegung des Dirac - Operators $\hat{\psi}$ gewinnen:

$$\hat{\psi} = \sum_s \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\hat{a}_{\omega,s} \psi_{\omega,s}^{+} + \hat{b}_{\omega,s}^{\dagger} \psi_{\omega,s}^{-} \right] \quad (12.56)$$

$$\hat{a}_{\omega,s} |0\rangle = \hat{b}_{\omega,s} |0\rangle = 0 \quad \forall \omega, s \quad (12.57)$$

Hier summiert s über die beiden Spinzustände.

v) Konstruktion einer Quantenfeldtheorie des beschleunigten Beobachters

Wir nehmen jetzt an, daß ein gleichförmig beschleunigter Beobachter B sich auf der Trajektorie $u = g^{-1}$ in I bewegt. Unruh, Rumpf und andere zeigten, daß B nur Wellenfunktionen mißt, die kausal mit ihm verknüpft sind.

Seine Welt wird deshalb durch die (eindeutigen) normierten Wellenfunktionen, welche Lösungen der Dirac - Gleichung auf $\mathcal{B} = I \cup F \cup P$ (incl. $\partial\mathcal{B}$, der Rand von $\mathcal{B}$) darstellen, beschrieben:

$$\psi_{\omega} = m^{1/2} e^{-\pi\omega/2} \left\{ 2 \mathcal{L}(\pi\omega)^I \psi_{\omega} + e^{-\pi\omega/2} F \psi_{\omega}^{(-)} - e^{3\pi\omega/2} F \psi_{\omega}^{(+)} + e^{\pi\omega/2} P \psi_{\omega}^{(-)} + e^{\pi\omega/2} P \psi_{\omega}^{(+)} \right\} \quad (12.58)$$

(Ψ_ω wird in Anhang B konstruiert)

Wir bemerken, daß Ψ_ω die Wellenfunktion $\mathbb{I} \Psi_\omega$ nicht enthält, da der Beobachter keinerlei Information über $\mathbb{I}$ besitzt.

Genau an dieser Stelle geht nun die topologische Struktur der Submannigfaltigkeit, welche die "Welt von $\mathcal{B}$ " repräsentiert, ein.

vi) Die Rindler - Temperatur

Die Beobachtermoden Ψ_ω hängen mit den Minkowski - Moden $\Psi_\omega^\pm$ folgendermaßen zusammen:

$$\Psi_\omega = \alpha_\omega \Psi_\omega^+ + \beta_\omega \Psi_\omega^-$$

$$\alpha_\omega = \frac{e^{\pi\omega/2}}{\sqrt{2 \operatorname{ch}(\pi\omega)}} \quad \beta_\omega = \frac{e^{-\pi\omega/2}}{\sqrt{2 \operatorname{ch}(\pi\omega)}} \quad (12.59)$$

Es ist nun klar, daß der Beobachter B folgende Spektralzerlegung von $\hat{\Psi}$ erfährt, da er Moden gemäß seiner Eigenzeit klassifiziert:

$$\hat{\Psi}^{\mathcal{B}} = \sum_s \int_0^\infty d\omega \left[\hat{c}_{\omega,s} \Psi_{\omega,s} + \hat{d}_{\omega,s}^\dagger \Psi_{-\omega,s} \right] \quad (12.60)$$

$$\{\hat{a}_{\omega,s}, \hat{a}_{\omega',s'}^\dagger\} = \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = \{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = \{\hat{d}, \hat{d}^\dagger\} = \delta_{ss'} \delta(\omega - \omega') \quad (12.61)$$

Die in der Zerlegung von $\hat{\Psi}^B$ auftauchenden Wellenfunktionen $\Psi_{\omega,s}$ sind wieder die Beobachtermoden aus Gleichung (12.58).

Danach ist das B - Vakuum über

$$\hat{c}_{\omega,s} |0_B\rangle = \hat{d}_{\omega,s} |0_B\rangle = 0 \quad \forall \omega, s \quad (12.62)$$

definiert.

Wir können die Anzahl von B - Teilchen im Minkowski - Vakuum gemäß (8.13) errechnen:

$$\langle 0 | \hat{c}_{\omega,s}^\dagger \hat{c}_{\omega',s'} | 0 \rangle = \beta_\omega^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{ss'} = [e^{2\pi\omega} + 1]^{-1} \delta(\omega - \omega') \delta_{ss'} \quad (12.63)$$

($\omega, \omega' > 0$)

Mit

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega - \omega')v} dv$$

können wir das Ergebnis (12.63) so deuten, daß wir die pro Zeitintervall dv erzeugte Teilchenrate durch Integration von $\beta_\omega^2 = [e^{2\pi\omega} + 1]^{-1}$ über die Frequenz ω erhalten.

Also

$$\frac{dN}{dv} = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega/2\pi}{e^{2\pi\omega} + 1} \quad (12.64a)$$

Mit $v = g\tau$, g ist die Beschleunigung des Beobachters, können wir das Ergebnis auf die Eigenzeit des beschleunigten Beobachters beziehen:

$$\frac{dN}{d\tau} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{\omega}/2\pi}{e^{2\pi\tilde{\omega}/g} + 1}$$

$\tilde{\omega} \equiv \omega g$ ist hier die physikalisch meßbare Frequenz

(12.64b)

Hier steht der Faktor zwei für die zwei Spinfreiheitsgrade. D.h. er mißt einen thermischen Fluß von Dirac - Teilchen mit der effektiven Temperatur

$$T_B = \frac{g\hbar}{2\pi ck} = 10^{-23} \text{ g } ^\circ\text{K} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}} \quad (12.65)$$

Es ist bemerkenswert, daß in dieses Ergebnis die Masse der Fermionen nicht eingeht.

Dies liegt daran, daß die Temperatur T_B durch das Auftreten des Ereignishorizontes (bei $u = 0$) wesentlich bestimmt wird, und dort die Masse keine Rolle spielt.

Wir sahen bereits, daß aufgrund dieses Ereignishorizontes der Energiegap zwischen Teilchen und Antiteilchenmoden unabhängig von m zum Verschwinden kam.

Wir wollen uns an dieser Stelle überlegen, weshalb ein reiner Zustand im Minkowski - Raum zu einem gemischten Zustand im Rindler - Raum wird.

Dies liegt daran, daß die von $\hat{\psi}^B$ erzeugte Algebra, die

C^* - Algebra der $(\hat{c}_{\omega,s}, \hat{d}_{\omega,s})$ nur eine Teilalgebra der vollen Minkowski - Feldalgebra ist, welche von $\hat{\psi}$ erzeugt wird.

Sei $|\omega_1 s_1, \dots, \omega_m s_m; \omega_{m+1}, s_{m+1}, \dots, \omega_n s_n\rangle = \hat{c}_{\omega_1 s_1}^\dagger \dots \hat{c}_{\omega_m s_m}^\dagger \hat{d}_{\omega_{m+1} s_{m+1}}^\dagger \dots \hat{d}_{\omega_n s_n}^\dagger |0_B\rangle$ ein m - Teilchen, (n - m) Lochzustand der Teilalgebra.

$$[\omega_1, \dots, \omega_m > 0; \omega_{m+1}, \dots, \omega_n < 0]$$

Der Projektor auf Rindler - Zustände lautet dann

$$\hat{P}_R = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ n \geq m}}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int_0^{\infty} d\omega_1 \dots d\omega_n |\omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n\rangle \langle \omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n| \quad (12.66)$$

Es ist

$$\hat{P}_R |0\rangle = \langle 0_B | 0\rangle \sum_{m,n,s} \int_0^{\infty} d\omega_1 \dots d\omega_n V_{\omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n} |\omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n\rangle \quad (12.67)$$

mit
$$V_{\omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n} = \frac{\langle \omega_1 s_1 \dots \omega_n s_n | 0\rangle}{\langle 0_B | 0\rangle}.$$

Nun wird im Allgemeinen $V \neq 0$ sein, d.h. der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist ein Vielteilchen - Viellochzustand in der Basis der Rindler - Zustände.

Wir bemerken noch Folgendes:

Transformiert man ψ_ω^+ vom Rindler'schen Koordinatensystem wie einen Skalar in das Minkowski'sche Koordinatensystem, so kann man auf der $t = 0$ Achse formal berechnen (siehe Anhang C) :

$$(\psi_{p,\uparrow}^+, \psi_{\omega,\uparrow}^-) = 0 \quad (12.68a)$$

$$(\Psi_{p,\uparrow}^-, \Psi_{w,\uparrow}^+) = 0 \quad (12.68b)$$

$$(\Psi_{p,\uparrow}^+, \Psi_{w,\uparrow}^+) = \frac{-i}{\sqrt{3E}} \left(\frac{E+p}{m} \right)^{-i\omega} \quad (12.68c)$$

$$(\Psi_{p,\uparrow}^-, \Psi_{w,\uparrow}^-) = \frac{1}{\sqrt{3E}} \left(\frac{E+p}{m} \right)^{i\omega} \quad (12.68d)$$

hierbei ist $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ und $\Psi_{p,\uparrow}^\pm$ sind die ebenen Wellen im Minkowski - Raum (mit Spin rauf):

$$|\Psi_{p,\uparrow}^+\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p/E+m \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx} e^{-iEt} \quad (12.69a)$$

$$N \equiv \sqrt{\frac{E+m}{2E}}$$

$$|\Psi_{p,\uparrow}^-\rangle = N \begin{pmatrix} -p/E+m \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx} e^{iEt} \quad (12.69b)$$

vii) Die masselose Dirac - Gleichung im Rindler - Raum

Es ist noch interessant, die Lösung der Dirac - Gleichung zu $m = 0$ zu betrachten.

In diesem Fall lautet die Dirac - Gleichung in allen vier Sektoren gleich:

Für Spin rauf Zustände setzen wir $\Psi = e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$

(12.10) und erhalten

$$g = -\frac{i}{\omega} (u f' + \frac{1}{2} f)$$

$$f = -\frac{i}{\omega} (u g' + \frac{1}{2} g)$$

(12.70)

Es treten also folgende zwei Lösungen auf:

$$^1 \Psi_w(v, u) = e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} e^{i(\omega + i/2) \ln u} \\ e^{i(\omega + i/2) \ln u} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.71a)$$

$$^2 \Psi_w(v, u) = e^{-i\omega v} \begin{pmatrix} e^{-i(\omega - i/2) \ln u} \\ 0 \\ -e^{-i(\omega - i/2) \ln u} \end{pmatrix} \quad (12.71b)$$

In F sollte nun der Teilchencharakter durch das Vorzeichen in $e^{\pm i\omega \ln u}$ bestimmt werden. (In F ist $u = t$ falls $z = 0$)

Wir schreiben dort (12.71) folgendermaßen um:

$$^F \Psi_w^{(\pm)} = e^{-i\omega v} f_w^{(\pm)} \quad (12.72a)$$

$$f_w^{(\pm)} = e^{\mp i(|\omega| \mp i/2) \ln u} \quad \sigma_{\mp \frac{\omega}{|\omega|}} \quad (12.72b)$$

$$\sigma_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.72c)$$

Für die Normierung der Wellenfunktionen ergibt sich

$$(^{1,2} \Psi_w, ^{1,2} \Psi_{w'}) = (^F \Psi_w^{(\pm)}, ^F \Psi_{w'}^{(\pm)}) = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (12.73)$$

und wegen der Unabhängigkeit von σ_{+1} von σ_{-1} gilt natürlich

$$(^{1,2} \Psi_w, ^{2,1} \Psi_{w'}) = (^F \Psi_w^{(\pm)}, ^F \Psi_{w'}^{(\mp)}) = 0 \quad (12.74)$$

Analoge Überlegungen gelten etwa auch in Sektor P etc..

viii) Analytische Eigenschaften der verschiedenen Moden,
Darstellungsprobleme

Wir wollen das Kapitel "Dirac - Teilchen im Rindler - Raum" mit einigen Bemerkungen über die analytischen Eigenschaften der Wellenfunktion $\psi_{\omega}^{\pm}$ beschließen.

Dies führt uns auf das Problem der Darstellung der generalisierten Dirac - Matrizen in den vier Sektoren.

Die zu $\psi_{\omega}^{\pm}$ analogen Bosonenwellenfunktionen haben folgende bemerkenswerte Eigenschaft: ^[1]

$\psi_{\omega}^{\pm}$ (Bosonenfunktionen) sind als Funktionen der komplexifizierten Minkowski - Koordinaten analytisch, falls deren Imaginärteil innerhalb des abgeschlossenen vergangenen (zukünftigen) Lichtkegels liegt.

Wir komplexifizieren also die Minkowski - Koordinaten (t, z) gemäß $(t, z) \rightarrow (t + i \tilde{t}, z + i \tilde{z})$, dann sollte etwa $\psi_{\omega}^{\pm}$ analytische Funktion im vollen Minkowski - Raum sein, wenn wir $(\tilde{t}, \tilde{z})$ innerhalb des abgeschlossenen vergangenen Lichtkegel durch 0 wählen (der Lichtkegel in der $(\tilde{t}, \tilde{z})$ - Ebene ist unabhängig von demjenigen der (t, z) - Ebene).

Daß dies von den Fermionenwellenfunktionen $\psi_{\omega}^{\pm}$ nicht erfüllt wird, liegt an der von uns gewählten Darstellung der γ^{μ} 's in den vier Sektoren (siehe Anhang D).

Folgende Wellenfunktionen $\tilde{\psi}^{\pm}$ besitzen das oben genannte analytische Verhalten:

$$\tilde{\Psi}_\omega^+ = \sqrt{\frac{m}{48}} \left(I \tilde{\Psi}_\omega - i e^{\pi\omega/2} F \tilde{\Psi}_\omega^{(+)} + e^{-\pi\omega} \bar{I} \tilde{\Psi}_\omega + e^{-\pi\omega/2} P \tilde{\Psi}_\omega^{(-)} \right) \quad (12.75)$$

$$\tilde{\Psi}_\omega^- = \sqrt{\frac{m}{48}} \left(e^{-\pi\omega} I \tilde{\Psi}_\omega + e^{-\pi\omega/2} F \tilde{\Psi}_\omega^{(-)} + \bar{I} \tilde{\Psi}_\omega - i e^{-\pi\omega/2} P \tilde{\Psi}_\omega^{(+)} \right) \quad (12.76)$$

mit $I \tilde{\Psi}_\omega = I \Psi_\omega$ (12.77a)

$$F \tilde{\Psi}_\omega^{(+)} = \begin{pmatrix} H_{i\omega-1/2}^{(2)}(m\omega) & - H_{i\omega+1/2}^{(2)}(m\omega) \\ H_{i\omega-1/2}^{(2)}(m\omega) & + H_{i\omega+1/2}^{(2)}(m\omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega\omega} \quad (12.77b)$$

$$F \tilde{\Psi}_\omega^{(-)} = \begin{pmatrix} H_{i\omega-1/2}^{(1)}(m\omega) & + H_{i\omega+1/2}^{(1)}(m\omega) \\ H_{i\omega-1/2}^{(1)}(m\omega) & - H_{i\omega+1/2}^{(1)}(m\omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega\omega} \quad (12.77c)$$

$$\bar{I} \tilde{\Psi}_\omega(t, z) = I \tilde{\Psi}_\omega(-t, -z) \quad (12.77d)$$

$$P \tilde{\Psi}_\omega^{(\pm)}(t, z) = F \tilde{\Psi}_\omega^{(\pm)}(-t, -z) \quad (12.77e)$$

Die Wellenfunktionen $\bar{I} \tilde{\Psi}_\omega$, $F, P \tilde{\Psi}_\omega^{(\pm)}$ lösen die Dirac - Gleichung in den jeweiligen Sektoren nur mit anderen Darstellungen der γ^μ 's als wir sie bei der Berechnung der Funktionen $\bar{I} \Psi_\omega$, $F, P \Psi_\omega^{(\pm)}$ verwendeten.

Sei etwa

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \quad (12.78)$$

wegen $e^{+i\pi/2} + e^{-i\pi/2} = 0$ ist U unitär, d.h. $U^\dagger = U^{-1}$.

Dann ist

$$F \tilde{\Psi}_\omega^{(+)} = U F \Psi_\omega^{(+)} \quad (12.79)$$

In F erfüllt $\bar{\Psi} \psi^{(+)}_{\omega}$ nun die Gleichung

$$\left[i \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}) - m \right] \Psi = 0 \quad (12.80)$$

sodaß die Funktion $\tilde{\Psi} = U \Psi$ Lösung folgender Gleichung ist

$$\left[i \gamma'^{\mu} (\partial_{\mu} + \Gamma'_{\mu}) - m \right] \tilde{\Psi} = 0 \quad (12.81)$$

mit:

$$\begin{aligned} \gamma'^{\mu} &= u \gamma^{\mu} u^{\dagger} & \gamma'^0 &= \gamma^0, \quad \gamma'^3 = \frac{1}{u} \gamma^3 \\ \Gamma_{\mu} &= (0, -\frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^3) & \Gamma'_{\mu} &= (0, -\frac{1}{2} \gamma'^0 \gamma'^3) \end{aligned} \quad (12.82)$$

Man findet

$$\gamma'^0 = -i \gamma^3 \quad \gamma'^3 = -i \gamma^0 \quad \{\gamma'^{\mu}, \gamma'^{\nu}\} = 2 g_{\mu\nu} \quad (12.83)$$

sodaß wir Gleichung (12.81) schreiben können als

$$\left[i \gamma^3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{u} \gamma^0 \frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{2u} \gamma^3 \right] \tilde{\Psi} = im \tilde{\Psi} \quad (12.84)$$

Dies ist aber exakt die Dirac - Gleichung von Sektor I mit im statt m , was man auch erwartet hätte, wenn man die Lösungen (12.16) und (12.34) in den Sektoren I und F vergleicht.

Auch die Abbildung $\bar{\Pi} \psi_{\omega} = \alpha_3 \bar{\Pi} \tilde{\psi}_{\omega}$ läßt sich als Darstel-

lungswechsel auffassen.

Mit $U = \alpha_3$ gilt nämlich $U^{-1} = U^+ = U$, $\gamma^{\mu'} \equiv U \gamma^{\mu} U^+ = -\gamma^{\mu}$,
sodaß $\tilde{\Psi}_{\omega}$ die Gleichung für Ψ_{ω} mit $-m$ statt m erfüllt.

Da jedoch $\tilde{\Psi}_{\omega}^+$ und $\tilde{\Psi}_{\omega}^-$ in F (bzw. P) die Dirac - Gleichung in unterschiedlicher Darstellung der γ^{μ} 's erfüllen, scheinen diese Wellenfunktionen weniger von Bedeutung zu sein als die Funktionen $\Psi_{\omega}^{\pm}$.

XIII Der gleichförmig beschleunigte Beobachter und Instantonen

Wir sahen im letzten Kapitel, daß ein gleichförmig beschleunigter Beobachter thermisch verteilte Dirac - Teilchen im Minkowski - Vakuum mißt.

Das Auftreten einer solchen Temperatur läßt sich nun mit geometrischen und topologischen Eigenschaften der mit dem Beobachter verknüpften Submannigfaltigkeit in Beziehung setzen.

Dies wurde insbesondere durch Arbeiten von Christensen und Duff^[60] und von N. Sanchez^[65-67] über Bosonenfelder klargestellt und wir wollen in diesem und im folgenden Kapitel kurz darauf eingehen.

i) Die Theorie von Christensen und Duff

(Wir weisen auf die in diesem Zusammenhang wichtige Theorie von Dowker^[123] hin.)

Versehen wir den Minkowski - Raum (Rindler - Raum) mit euklidischen Koordinaten $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ $(\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y})$ so lautet das euklidische Längenelement

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 = \tilde{u}^2 d\tilde{v}^2 + d\tilde{u}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 \\ &\equiv r^2 d\phi^2 + dr^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 \\ (\tilde{u} \equiv r, \tilde{v} \equiv \phi) \end{aligned} \quad (13.1)$$

und es gilt

$$\tilde{t} = \tilde{u} \sin \tilde{v}, \tilde{z} = \tilde{u} \cos \tilde{v} \text{ bzw. } \tilde{t} = r \cos \phi, \tilde{z} = v \sin \phi \quad (13.2)$$

In euklidischen Rindler - Koordinaten $(\tilde{v}, \tilde{u})$ hat $\tilde{v}$ offenbar die Bedeutung einer Winkelvariablen um die Achse $\tilde{u} = r = 0$.

(Wir lassen im Weiteren die Tilden über den Variablen fort und meinen automatisch euklidische Koordinaten.)

Der Sektor I geht durch die Euklidisierung über in den Bereich $\tilde{u}^2 = r^2 > 0$ ($r > 0$) und der ganze Ereignishorizont geht über in den Punkt $r = 0$.

Die Weltlinie des gleichförmig beschleunigten Beobachters lautete in üblichen Rindler - Koordinaten $u = g^{-1}$, welche

jetzt auf die Kreislinie mit $r = g^{-1}$ abgebildet wird.

(siehe Fig. 11)

Die mit dem Beobachter verknüpfte Submannigfaltigkeit ist nun Sektor $I \subset \mathcal{M}$ ohne den Ereignishorizont bei $u = 0$.

Im euklidischen Raum erhält man dann Folgendes:

Die Koordinatentransformation ändert zwar die Geometrie des Raumes nicht ($R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$), wohl aber ihre Topologie. Der inertielle Beobachter ($ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$) erfährt die euklidische Topologie $\mathbb{R}^4$, der gleichförmig beschleunigte dagegen die Topologie $\mathbb{R}^3 \times S^1$ (S^1 ist die eindimensionale Kreislinie), da sein Raum ein Loch bei $r = 0$ aufweist.

Dieser Umstand kann durch eine topologische Invariante, der Euler - Charakteristik χ beschrieben werden.

In einer zweidimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist χ gegeben durch ^[61]

$$2\pi \chi[\mathcal{M}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^2x \sqrt{g} R + \int_{\partial\mathcal{M}} dy \sqrt{\gamma} K \quad (13.3)$$

Hier sind x^μ ($\mu = 1, 2$) die Koordinaten der (zweidimensionalen) Mannigfaltigkeit, y parametrisiert den Rand $\partial\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$, $g = \det g_{\mu\nu}$, $\gamma = \det \gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$ ist die Metrik am Rand, R der Krümmungsskalar und $K = K^\mu_\mu$, $K_{\mu\nu} = \nabla_\nu n_\mu$ wo n_μ der nach außen gerichtete Normalenvektor auf ist.

Wir wollen $\chi[\mathcal{M}]$ für die (zweidimensionalen) Topologien $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R} \times S^1$ berechnen.

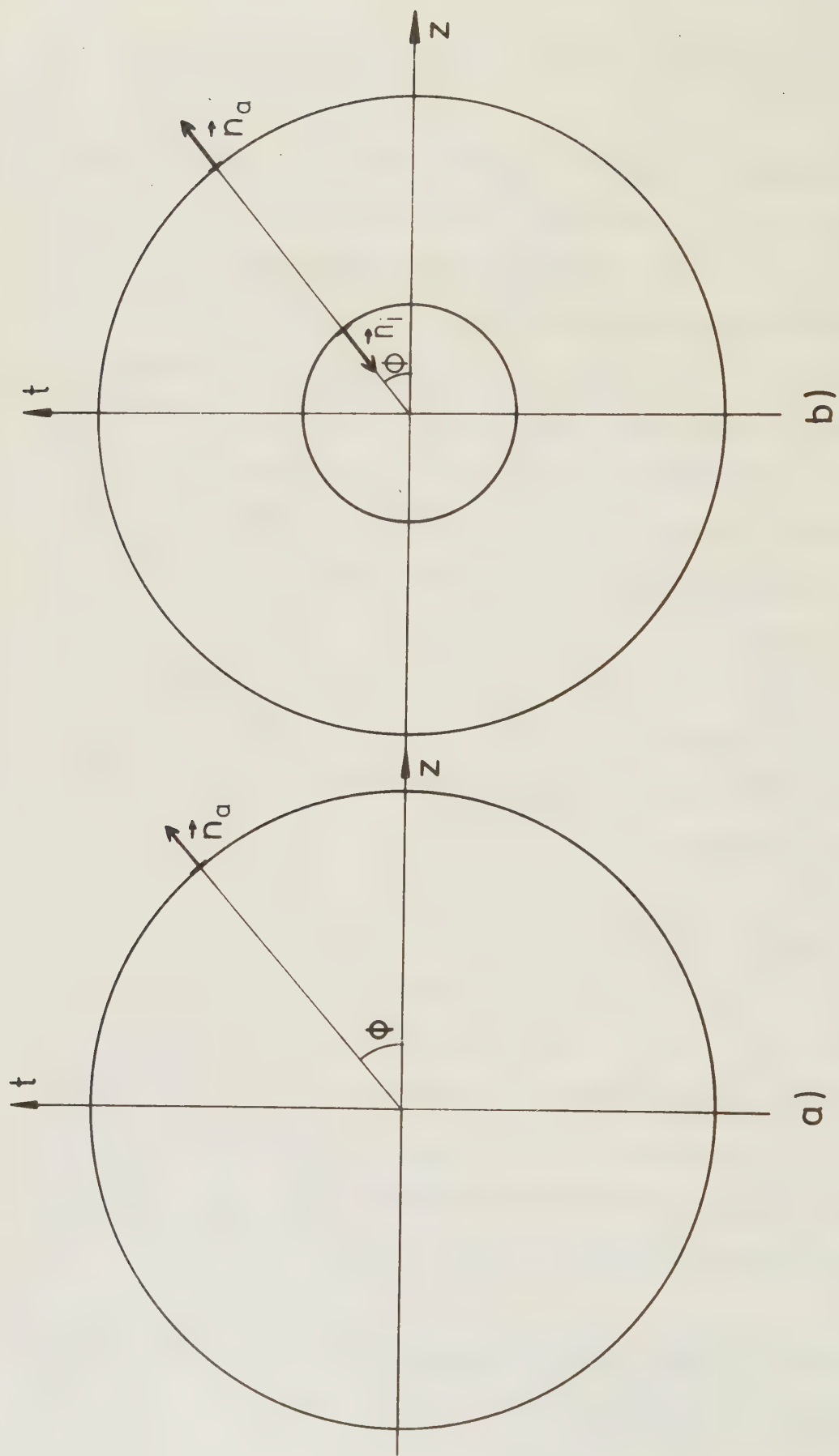


Fig.12

Wenn wir $\mathbb{R}^2$ nicht Alexandroff - kompaktifizieren ("Hinzunahme des Nordpols auf der Riemann'schen Zahlenkugel"), so ist $\mathbb{R}^2$ topologisch äquivalent zur Kreisscheibe (siehe Fig. 12a).

In Polarkoordinaten ist $ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2$. Da im flachen Raum der Riemann'sche Krümmungsskalar verschwindet ($R = 0$), trägt zu $\chi[\mu]$ in (13.3) nur der Randterm bei.

Für den Raum $\mathbb{R}^2$ können wir S^1 als Rand von $\mathcal{M}$ wählen und $dy = d\phi$ setzen.

In Polarkoordinaten ist ferner $\sqrt{g} = r$ und $n_i = (1, 0)$,

$$\nabla_2 n_2 = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad n_1 = r, \text{ also } K = \frac{1}{r}. \quad (x^1 = r, x^2 = \phi)$$

Es ergibt sich also

$$\chi[\mathbb{R}^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\phi = 1 \quad (13.4)$$

Der Raum $\mathbb{R} \times S^1$ ist äquivalent zu einem Kreisring (siehe Fig. 12b).

Da n_i stets nach außen gerichtet ist, trägt der "innere Rand" mit dem Wert -1 zu $\chi[\mathbb{R} \times S^1]$ bei und es gilt

$$\chi[\mathbb{R} \times S^1] = 0 \quad (13.5)$$

Auch im Falle der vierdimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit findet man

$$\chi[\mathbb{R}^4] = 1$$

$$\chi[\mathbb{R}^3 \times S^1] = 0 \quad (13.6)$$

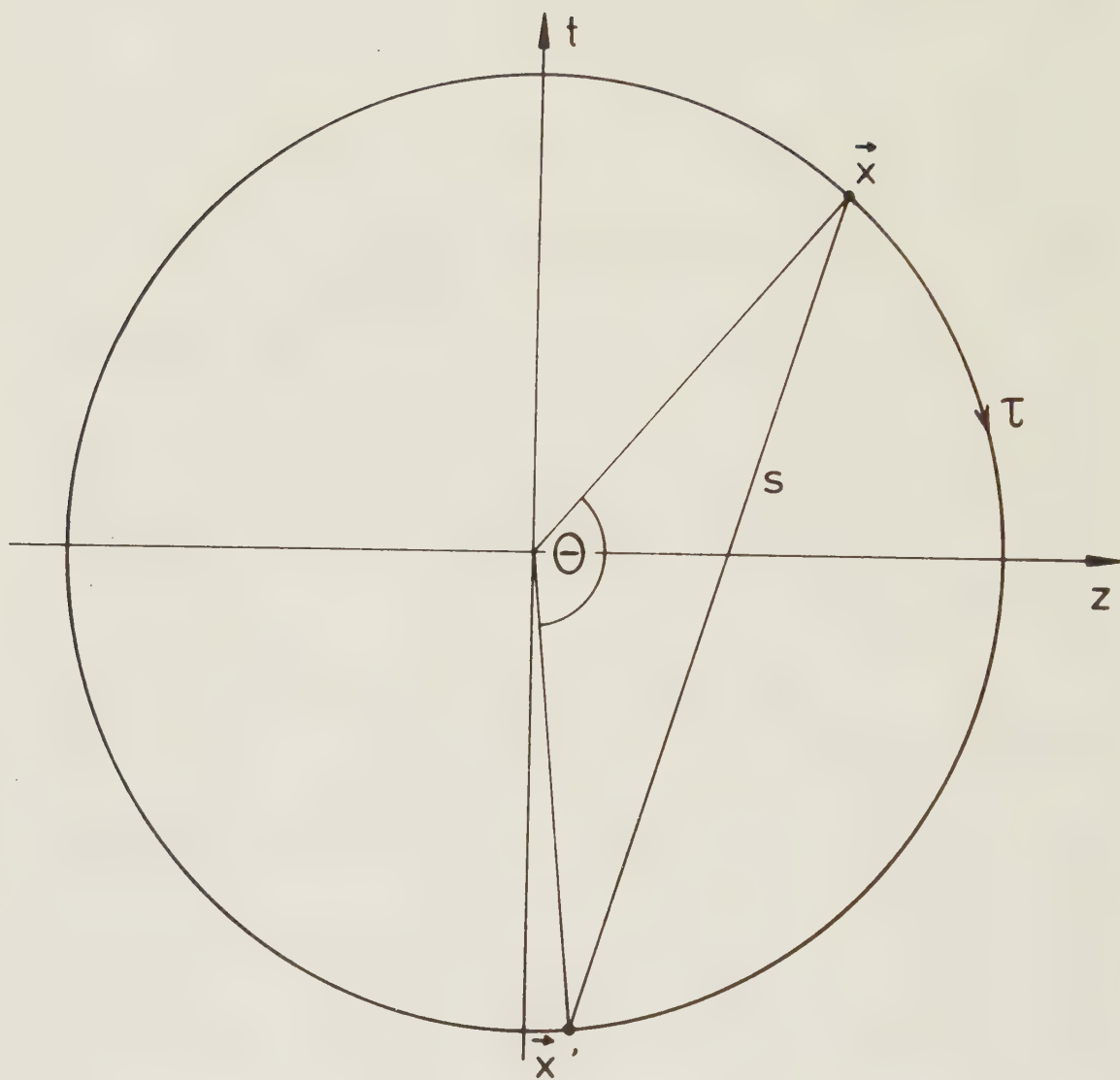


Fig.11

Obwohl also unsere Koordinatentransformation eine reine Umeichung bedeutet, führt sie auf Räume mit verschiedener Topologie.

Christensen und Duff nennen daher in Analogie zu verwandten Phänomenen in den Yang - Mills - Eichtheorien den Rindler - Raum "Gravitationsinstanton".

Auch die Tatsache, daß der beschleunigte Beobachter ein isotropes Temperaturbad im Minkowski - Vakuum erfährt, läßt sich homotopietheoretisch deuten.

Wir wollen dazu die masselose euklidische Dirac - Gleichung studieren.

Sei

$$\gamma_E^0 = \gamma^0, \gamma_E^a = i \gamma^a \quad (a = 1, 2, 3) \quad (13.7)$$

wobei γ^μ wieder die üblichen Dirac - Matrizen im üblichen Minkowski - Raum sind.

Offenbar gilt

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2 \eta_{\mu\nu}^E = 2 \text{diag} (1, 1, 1, 1) \quad (13.8)$$

Die masselose euklidische Dirac - Gleichung lautet dann

$$i \gamma_E^\mu \partial_\mu \psi \equiv \partial_E \psi = 0 \quad (13.9)$$

Sei

$$\partial_\mu \partial^\mu G^{(1)}(\vec{x}) = -\delta(\vec{x}) \quad \vec{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (13.10)$$

$$S^{(1)}(\vec{x}) = \partial_E G^{(1)}(\vec{x}) \quad (13.11)$$

dann gilt

$$\partial_E S^{(1)}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (13.12)$$

d.h. $S^{(1)}(x)$ ist die euklidische Greensfunktion der Dirac Gleichung.

Wir fordern noch

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} G^{(1)}, S^{(1)} = 0 \quad (13.13)$$

Wir berechnen zunächst $G^{(1)}(x)$.

Nun ist Gleichung (13.10) die Poisson - Gleichung für eine Punktladung in vier Dimensionen.

Wir zeigen

$$G^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|\vec{x}|^2} \quad (13.14)$$

bzw.

$$\partial_\mu \partial^\mu \left(\frac{1}{r^2} \right) = -4\pi^2 \delta(r) \quad (r \equiv |\vec{x}|) \quad (13.15)$$

Wir integrieren dazu die linke Seite von (13.15) über eine vierdimensionale Kugel mit Radius r und wenden den Satz von Gauß an:

$$\int_{\Omega} d^4x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) d\sigma \quad (13.16)$$

In vierdimensionalen Kugelkoordinaten

($x^0 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1$, $x^1 = r \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1$, $x^2 = r \sin \theta_3 \cos \theta_2$, $x^3 = r \cos \theta_3$) ist der Rand $\partial \Omega$ der Kugel durch $r = \text{const.}$ gegeben,

$$d\sigma = r^3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \text{ und } \vec{n} \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Nun ist

$$\int_{\Omega} d^4x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^2} \right) = r^3 \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \int_0^{\pi} d\theta_3 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} = -4\pi^2 \quad (13.17)$$

Da das Ergebnis unabhängig ist vom Rand der Kugel, gilt

$$G^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|\vec{x}|^2} \text{ bzw. } G^{(1)}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\vec{x} - \vec{x}')^2} = \frac{1}{4\pi s^2} \quad (13.18)$$

Hier ist s der euklidische, geodätische Abstand zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}'$.

(Durch die Bedingung von (13.13) ist $G^{(1)}$ damit festgelegt.)

Seien $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ Punkte auf der Trajektorie $\mathcal{T}$ des beschleunigten Beobachters mit $x = y = 0$, $r = g^{-1}$.

$\vec{x}$, $\vec{x}'$ werden dann vollständig durch die Angabe von $v = \phi$, $v' = \phi'$ beschrieben (siehe Fig. 11).

Sei $\theta = \phi - \phi'$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist dann } s^2 &= 2r^2 - 2r^2 \cos \theta = 2g^{-2} (1 - \cos \theta) \\ &= 4g^{-2} \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\phi - \phi') \right]. \end{aligned}$$

Mit $v = g\tau$ (d.h. ein Punkt auf der Kreislinie $\mathcal{T}$ wird

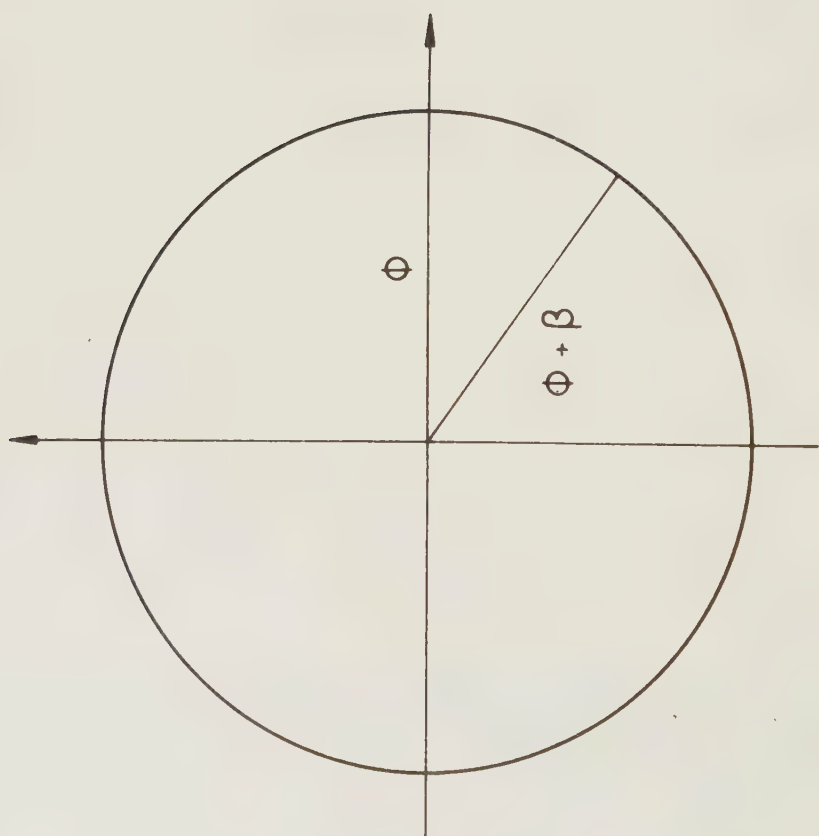
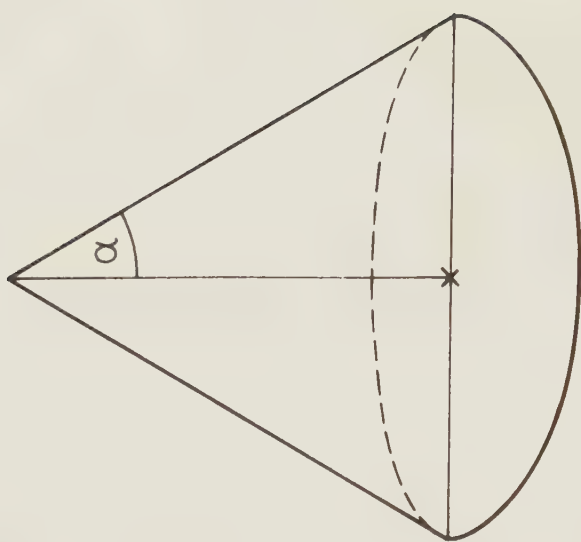


Fig.13

durch die Eigenzeit des Beobachters gegeben) erhält man also

$$G^{(1)}(\tau, \tau') = \frac{1}{4\pi^2} \frac{g^2/4}{\sin^2[g/2(\tau - \tau')]} \quad (13.19)$$

Die Dirac'sche Greens - Funktion $S^{(1)}(\tau, \tau')$ auf $\mathcal{I}$ wird dann durch (13.11) bestimmt und wegen (13.19) gilt

$$S^{(1)}(\tau, \tau') = S^{(1)}(\tau, \tau' + \frac{2\pi n}{g}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (13.20)$$

Diese Eigenschaft ist verständlich, da für den inertialen Beobachter Winkel mit $g\tau$ und $g\tau + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) zusammenfallen.

Dies gilt jedoch für den beschleunigten Beobachter nicht mehr, da er Wege nach $g\tau$ und $g\tau + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) durch ihre Windungszahl um den Ursprung unterscheiden kann.

[113]

Betrachtet man Mannigfaltigkeiten der Form

$$ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 \quad \phi = \phi + \beta \quad (13.21)$$

so beschreibt dieses Linienelement wegen der Identifikation der Winkel ϕ mit $\phi + \beta$ die Oberfläche eines Kegels mit einem Öffnungswinkel von $\gamma = 2\alpha = 2 \sin^{-1}(\frac{\beta}{2\pi})$. Für $\beta = 2\pi$ entartet der Kegel zur zweidimensionalen Ebene, für $\beta > 2\pi$ beschreibt das Linienelement (13.21) eine Riemann'sche Fläche mit mehreren Blättern (s. Fig.13).

Für $\beta \rightarrow \infty$ beschreibt (13.21) eine Riemann'sche Fläche mit unendlich vielen Blättern.

Die Propagatoren G_β und S_β mögen auf der Kegeloberfläche (13.21) so definiert sein:

$$\partial_\mu \partial^\mu G_\beta(\tau, \phi; \tau', \phi') = -\frac{1}{V} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (13.22a)$$

$$G_\beta(\phi, \phi') = G_\beta(\phi, \phi' + \beta) \quad (13.22b)$$

und

$$S_\beta = \mathcal{D}_E G_\beta \quad (13.23a)$$

$$S_\beta(\phi, \phi') = S_\beta(\phi, \phi' + \beta) \quad (13.23b)$$

Für den inertialen Beobachter ist nun $\beta = 2\pi$ und dessen freie Dirac'sche Greens'sche Funktion $S^{(1)}$ stimmt wegen der Eigenschaft (13.20) mit $S_{2\pi}$ überein.

Für den beschleunigten Beobachter jedoch sollte dessen freie Greens'sche Funktion überhaupt keine Periode aufweisen, d.h. $S^{(0)} = S_\infty$.

Wegen (13.20) kann man $S^{(0)}$ auch aus

$$G^{(0)}(\tau, \tau') = \lim_{g \rightarrow 0} G^{(1)}(\tau, \tau') = \frac{1}{4\pi^2 (\tau - \tau')^2} = \frac{1}{4\pi \sigma^2} \quad (13.24)$$

erhalten.

Hier ist σ die Bogenlänge zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ längs $\mathcal{T}$.

Wegen der Mittag - Leffler - Entwicklung

$$\left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\theta + 2\pi n)^{-2} \quad (13.25)$$

gilt

$$S^{(1)}(\tau, \tau') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S^{(0)}\left(\tau, \tau' + \frac{2\pi n}{f}\right) \quad (13.26)$$

Da nun physikalische Ereignisse unabhängig von irgendwelchen Windungszahlen an Punkten x auftreten (die Feynman'sche Propagationsamplitude von x nach x' erhält man durch Summe über alle Wege von x nach x' !), sollte man jedoch den physikalisch relevanten Propagator des beschleunigten Beobachters erhalten, indem man alle Amplituden $S^{(0)}$ von τ nach τ' über Wege, welche n - mal um den Ursprung laufen, zusammenzählt.

Wegen (13.26) ist $S^{(1)}$ der "wahre Propagator" von $\mathcal{B}$.

Wir wollen diesen Umstand physikalisch interpretieren.

Es ist bekannt, ^[63,64] daß die Eigenschaft (13.23b) die Greens - Funktion S_β eindeutig festlegt und daß S_β übereinstimmt mit

$$S_\beta(x, x') = \frac{\text{Tr } e^{-\beta H} \psi(x) \bar{\psi}(x')}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \quad (13.27)$$

H sei der Generator für τ - Translationen

$$\frac{d\hat{A}}{d\tau} = i [\hat{H}, \hat{A}]$$

Dann ist S_β die Temperatur - Greens - Funktion, die ein

Beobachter der Eigenzeit τ in einem isotropen Wärmebad der Temperatur $kT = \beta^{-1}$ erfährt.

$S^{(1)}$ stimmt also für den beschleunigten Beobachter mit

$$S_\beta (\beta^{-1} = kT = \frac{g}{2\pi}) \quad \text{überein.}$$

Wie wir bereits im letzten Kapitel sahen, erfährt dieser im Minkowski - Vakuum ein (isotropes) Wärmebad der Temperatur $T_B = \frac{g}{2\pi}$.

Für den inertialen Beobachter ist τ nicht dessen Eigenzeit, und Punkte $\vec{x}, \vec{x}'$ auf der Trajektorie $\mathcal{T}$ sind für ihn nur willkürlich gewählte Punkte, sodaß für ihn $S^{(1)}$ natürlich nur den freien Propagator ohne thermisches Verhalten darstellt. (Erst $S^{(1)}$, interpretiert mit den Größen, die der gleichförmig beschleunigte Beobachter mißt, repräsentiert eine Temperatur - Greens - Funktion.)

Nach dem bisher Gesagten könnte es scheinen, als würde eine beobachterabhängige Teilchenrate nur für beschleunigte Systeme mit Ereignishorizont auftreten, d.h. die Paarbildung durch den Ereignishorizont zustandekommen.

Dies ist jedoch nicht der Fall, wie N. Sanchez gezeigt hat, und wir werden im nächsten Kapitel darauf eingehen.

XIV Beschleunigte Beobachter und konforme Abbildungen

i) Beschleunigte Koordinatensysteme und konforme Abbildungen

Wie N. Sanchez gezeigt hat, kann man beobachterabhängige Teilchenraten, wie im Falle des Rindler - Raumes, mit konformen Abbildungen der euklidischen Koordinaten in Verbindung bringen.

Dies gestattet dann die Diskussion einer großen Klasse von beschleunigten Koordinatensystemen (nicht nur das gleichförmig beschleunigte!).

Dabei stellt sich heraus, daß das Auftreten einer Temperatur nicht an die Existenz eines Ereignishorizontes gebunden ist.

Betrachtet man die zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Koordinaten (t, z) ausnahmsweise mit Signatur $(- +)$, so geht man durch $t = -i\tau$ in den euklidischen Raum über.

Die komplexe Variable u sei durch $z + i\tau$ in der (z, τ) - Ebene definiert.

D.h. die (z, τ) - Ebene beschreibt das ungestrichene Koordinatensystem.

Die analytische Abbildung

$$u = f(u') \quad \text{bzw.} \quad F(u) = u' \quad (14.1)$$

beschreibt dann eine Koordinatentransformation von den Koordinaten (z, τ) auf ein gestrichenes Koordinatensystem (z', τ') .

$$[u' = z' + i\tau']$$

Bekanntlich beschreiben analytische Abbildungen konforme Strukturen und das Längenelement $ds^2 = d\tau^2 + dz^2$

wird auf

$$ds^2 = \left| f'(u') \right|^2 (d\tau'^2 + dz'^2) \quad (14.2)$$

abgebildet.

Punkte mit $f'(u') = 0$ heißen kritische Punkte, solche mit $F(u) = \pm \infty$ singuläre Punkte der Abbildung.

Die Abbildung (14.1) beschreibt die Transformation eines ruhenden Beobachters im Minkowski - Raum mit Koordinaten (t, z) auf ein beschleunigtes Bezugssystem (t', z') .

Die Trajektorie $\mathcal{T}$ des beschleunigten Beobachters ist durch $z' = \text{const.}$ gegeben.

Auf der reellen u - Achse sei f reell mit

$$f(-\infty) = u_-$$

$$f(+\infty) = u_+ \quad (14.3)$$

und f bilde die reelle u' - Achse bijektiv und monoton (dann existiert etwa die Umkehrabbildung F aus Gleichung (14.1)) auf das Intervall (u_-, u_+) der reellen u - Achse ab.

Das beschleunigte System u' bedeckt dann im Minkowski - Raum nur das Gebiet

$$u_- \leq z \pm t \leq u_+ \quad (14.4)$$

u_+ und u_- sind dann singuläre Punkte der Abbildung; falls außerdem noch $u_+ \neq \mp \infty$ gilt, sind es auch kritische Punkte.

Kritische Punkte entsprechen Ereignishorizonten des beschleunigten Beobachters.

Wir machen uns dies am Beispiel des Rindler - Raumes klar. Die Koordinatentransformation ($g = 1$): $t = z' \operatorname{sh} t'$, $z = z' \operatorname{ch} t'$ läßt sich in Sektor I $\subset \mathcal{M}$ ($z' > 0$) ja auch durch

$$t = e^{z'} \operatorname{sh} t' \quad z = e^{z'} \operatorname{ch} t' \quad (14.5)$$

beschreiben.

mit $t = -i\tau$, $t' = -i\tau'$ lautet dies

$$\tau = e^{z'} \sin \tau' \quad z = e^{z'} \cos \tau' \quad (14.6a)$$

bzw.

$$u = z + i\tau = e^{z' + i\tau'} = e^u \quad (14.6b)$$

D.h. die Transformation von "ruhenden" Koordinaten auf gleichförmig beschleunigte läßt sich durch die Abbildung $f(u') = e^{u'} = u$ beschreiben.

Die Trajektorie des beschleunigten Beobachters ist durch $z' = \text{const.}$ gegeben, bzw. durch $u = z + i\tau = r e^{i\phi}$, wie wir bereits im letzten Kapitel sahen. (Siehe Fig. 11.)

Für die Abbildung (14.6) gilt $u_- = 0$, $u_+ = \infty$ und das vom überstrichenen Koordinatensystem überdeckte Gebiet

$u_- \leq z \pm t \leq u_+$ ist gerade der Sektor $I \subset \mathcal{M}$.

Kritische Punkte sind durch $f'(u') = e^{u'} = u = 0$ gegeben, was den Ereignishorizont des hyperbolischen Beobachters angibt.

Wie wir im letzten Kapitel sahen, produzieren kritische Punkte der Abbildung (Ereignishorizonte) eine neue Topologie, wie sie durch χ beschrieben wird.

ii) Differentielle Windungszahl und Temperatur

Die folgenden Aussagen wurden von N. Sanchez für ein masseloses Skalarfeld hergeleitet.

Sie gelten vermutlich auch für Skalarfelder mit Masse als auch für Dirac - Felder.

Mit Hilfe der konformen Abbildung f kann man das Teilchenspektrum, welches der durch f beschleunigte Beobachter im Minkowski - Vakuum erfährt, berechnen. D. h. die Bogoliubov - Transformation (8.7) oder die Anzahl $N_V(k)$ der erzeugten Teilchen pro Impuls und Volumenintervall im beschleunigten Bezugssystem und Minkowski - Vakuum lassen sich allgemein durch die konforme Abbildung f ausdrücken. Das erzeugte Teilchenspektrum hat im Falle der gleichförmigen Beschleunigung thermischen Charakter, wie wir für die Fermionen in Kapitel XII sahen.

Wir betrachten dazu die Abbildung $\mathcal{C}$ der Trajektorie

$\mathcal{T}$ ($z' = \text{const.}$) im euklidischen (z, τ) - Raum.

$$[\mathcal{C} = \{ (z, \tau) \mid f(\tau', z' = \text{const.}) \}]$$

Für den gleichförmig beschleunigten Beobachter war dies die Kreislinie von Fig. 11.

Die Windungszahl von $\mathcal{C}$ längs einer Bogenlänge $\text{arc } L$ sei durch

$$n_L = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial \theta(z', \tau')}{\partial \tau'} d\tau' \quad \theta \equiv \arg f(z' + i\tau') \quad (14.7)$$

gegeben.

Sie gibt die Anzahl von Umdrehungen des Tangentenvektors an $\mathcal{C}$ an, wenn er L durchläuft. Dies ist leicht einsichtig:

Wegen $z' = \text{const.}$ ist $2\pi n_L = \int_L d\theta(z', \tau')$ und $\theta(z', \tau')$ gibt gerade den Winkel an, unter dem der Punkt (z', τ') in der u - Ebene erscheint.

Läuft man also etwa einmal um den Ursprung herum, so ist

$\int_L d\theta(z', \tau') = \int_0^{2\pi} d\phi(z', \tau') = 2\pi$ oder $n_L = 1$, was mit der Anschauung übereinstimmt.

Die differentielle Windungszahl $T(z', \tau')$ sei durch

$$\begin{aligned} T(z', \tau') &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \theta(z', \tau')}{\partial \tau'} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau'} \operatorname{Im} \ln f(z' + i\tau') \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau'} \operatorname{Re} \ln f(z' + i\tau') \end{aligned} \quad (14.8)$$

gegeben.

Die Kurven $\mathcal{C} : z' = \text{const.}$ im euklidischen Raum entspre-

chen klassisch verbotenen Trajektorien des beschleunigten Beobachters zu imaginären Zeiten t' .

Es ist daher nicht verwunderlich, wenn man aus den geometrischen und topologischen Eigenschaften von $\mathcal{C}$ das Teilchenspektrum, welches der beschleunigte Beobachter sieht, ablesen kann.

So spielt $T(z', \tau')$ die Rolle einer lokalen Temperatur, wie man sie aus $N_V(k)$ ableitet, falls diese Größe nicht zu stark schwankt.

Wie man aus Gleichung (14.8) entnimmt, ist etwa

$$T_{\pm} = \lim_{\substack{u' \in \mathbb{R} \\ u' \rightarrow \pm\infty}} T(z', \tau') = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{du'} \ln f(u') \right]_{u' = \pm\infty} \quad (14.9)$$

die asymptotische Temperatur in der Gegend der singulären Punkte $u' = \pm\infty$ der Abbildung.

Für den Rindler - Raum ($f(u') = e^{u'}$, siehe (14.6b)) findet man

$$(g = 1) \quad T_+ = T_- = \frac{1}{2\pi} = T_B \quad (14.10)$$

und die Temperatur ist im Rindler - Raum überall konstant. Die Temperatur als differentielle Windungszahl einer konformen Abbildung ist ein geometrisches, kein topologisches Konzept.

Daher ist das Auftreten einer solchen Temperatur nicht an die Existenz eines Ereignishorizontes gebunden.

iii) Entropie, Euler - Charakteristik und
Hawking - Temperatur

Ereignishorizonte ändern die Topologie der Raum - Zeit, d.h. es gibt Gebiete der Raum - Zeit, welche für den Beobachter informationstheoretisch nicht zugänglich sind. Da die mittlere Menge an Information mit der physikalischen Entropie verknüpft ist, sollte das Auftreten eines Ereignishorizontes die Entropie des Systems beeinflussen.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß sich die Entropie eines im Minkowski - Vakuum beschleunigten Systems mit Hilfe der Euler - Charakteristik ausdrücken läßt.

Wir bemerken schließlich noch, daß die Methode der konformen Abbildung auch auf spezielle Fälle von vierdimensionalen gekrümmten Raum - Zeiten übertragen werden kann.

Im Falle nämlich, daß die vierdimensionale Mannigfaltigkeit geeignete Symmetrie aufweist, läßt sich die volle vierdimensionale Mannigfaltigkeit durch maximale analytische Fortsetzung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer Zeitachse und einer geeignet gewählten Raumachse beschreiben.

So können wir im Schwarzschild - Feld etwa die Winkel Θ und ϕ unterdrücken und erhalten

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 & r_s \equiv 2M < r < \infty \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dr^{*2}) & -\infty < r^* < +\infty \end{aligned} \quad (14.11)$$

mit $r^* = r + 2M \ln(r - 2M)$.

Die Mannigfaltigkeit hat in diesen Koordinaten einen Ereignishorizont bei $r = 2M = r_s$ bzw. $r^* = -\infty$.

Gemäß

$$\begin{aligned} r_k &= e^{\frac{r^*}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} = (r - 2M)^{1/2} e^{\frac{r^*}{4M}} \cosh \frac{t}{4M} \\ t_n &= e^{\frac{r^*}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} = (r - 2M)^{1/2} e^{\frac{r^*}{4M}} \sinh \frac{t}{4M} \end{aligned} \quad (14.12)$$

transformiert man die (t, r^*) Koordinaten auf neue (t_k, r_k) Koordinaten.

(t_k, r_k) sind die üblichen Kruskal - Koordinaten, welche die volle Schwarzschild - Mannigfaltigkeit beschreiben.

(t_k, r_k) sind die üblichen Kruskal - Koordinaten, welche die volle Schwarzschild - Mannigfaltigkeit beschreiben.

(t_k, r_k) entsprechen also den üblichen Minkowski - Koordinaten (t, z) , (t, r^*) den gestrichenen, beschleunigten Koordinaten (t', z') , da in diesen der Ereignishorizont bei $r^* = -\infty$ auftritt.

(Wegen (14.3) verwenden wir hier das (t, r^*) Koordinatensystem und nicht das (t, r) System.)

Man sieht, daß die Transformation (14.12) vollständig analog ist zur Transformation von ruhenden Koordinaten im Minkowski - Raum auf gleichförmig beschleunigte Koordinaten, wobei $g = \frac{1}{4M}$ gilt, vgl. (14.5).

Die Temperatur, die daher ein bei $r > r_s$ im Schwarzschild-Feld ruhender Beobachter mißt, ist die Hawking - Temperatur

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}.$$

Für einen frei fallenden Beobachter hat nach Obigem diese Temperatur keinen Sinn.

XV Nichtlokale Strukturen in der Raum - Zeit

i) Motivation

In den letzten Kapiteln wurde deutlich, daß die globale topologische Struktur derjenigen Submannigfaltigkeit, welche mit einem Beobachter verknüpft ist, für gewisse physikalische Phänomene eine entscheidende Rolle spielt.

Dieser Umstand ist natürlich nicht auf Fermionensysteme beschränkt sondern etwa für Bosonenfelder schon lange bekannt.

Wir wollen in diesem Kapitel deshalb von der Betrachtung von Dirac - Feldern abgehen und statt dessen das von einer Punktladung produzierte elektromagnetische Feld in verschiedenen Situationen analysieren.

Es stellt sich heraus, daß dieses Beispiel besonders gut geeignet ist, nichtlokale Eigenschaften gewisser Phänomene zu verdeutlichen.

Zu diesem Zweck genügt es, das elektromagnetische Feld als unquantisiertes, klassisches Feld anzusehen.

Die physikalische Raum - Zeit wird allgemein durch eine stetige Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ beschrieben; d.h. man nimmt an, daß Raum - und Zeitabstände beliebig genau bestimmt werden

können, wenigstens im Prinzip.

Weiterhin nimmt man an, daß alle Wechselwirkungen von einem Raumpunkt $\vec{x}$ während eines kleinen Zeitintervalles dt nur zu einem Nachbarpunkt $\vec{x} + d\vec{x}$ propagieren können, welcher von $\vec{x}$ nur infinitesimal benachbart ist.

In diesem Sinne einer Nahwirkungstheorie werden die meisten physikalischen Systeme durch Differentialgleichungen über $\mathcal{M}$ beschrieben.

Unter der Menge aller möglichen Lösungen wählt man dann die physikalischen aus, indem man Randbedingungen an die Differentialgleichung stellt, welche ein bestimmtes physikalisches System spezifizieren.

Häufig werden solche Randbedingungen durch konkrete materielle Objekte realisiert, wie zum Beispiel durch die zwei leitenden Platten im Kondensator.

Wir begegnen jedoch Situationen, in denen ein bestimmtes System nicht in einem endlichen Raumvolumen "vernünftig" lokalisiert werden kann, z.B. wenn Teilchenemission oder Strahlung im System auftritt.

In solch einem Fall wird die globale Struktur der Raum - Zeit selbst Teil der Randbedingung.

Dann wird das Verhalten des physikalischen Systems von der Topologie von $\mathcal{M}$ im Ganzen abhängen, z.B. von der Art des Randes von $\mathcal{M}$.

So mag etwa die globale Struktur des Universums das Verhalten physikalischer Systeme im Kleinen mitbestimmen.

An dieser Stelle ist es unmöglich, die gravitative Wechselwirkung außer acht zu lassen, da sie die kausale und globale Struktur der Raum - Zeit bestimmt ^[68].

So ist es die Energieimpulsverteilung von Materie, welche die Struktur des Universums im Großen bestimmt und umgekehrt, in Einklang mit dem Mach'schen Prinzip die Physik im Kleinen mitbestimmt.

Die physikalischen Phänomene, welche durch die globale Struktur der Raum - Zeit mitbestimmt werden, sind solche von nichtlokaler Natur, wo ein hinreichend großes Gebiet der Raum - Zeit zu ihrer Erklärung herangezogen werden muß.

Man findet, daß z.B. Bremsstrahlung eine solche nichtlokale Struktur in der Raum - Zeit repräsentiert. Dieses Beispiel wird im Folgenden ausführlich behandelt werden.

ii) Ausgezeichnete Koordinatensysteme und Mach'sches Prinzip

Wir werden im Folgenden von der Bewegung von Objekten und Beobachtern sprechen und werden deshalb spezifizieren müssen, was wir damit meinen.

Nehmen wir für einen Moment an, wir hätten Metainstrumente zur Verfügung, um Längen und Zeiten zu messen.

Metainstrumente mögen solche sein, die nicht aus materieller Substanz aufgebaut sind.

Wenn wir uns nun nur genau eine Punktmasse im ganzen Universum vorstellen, so ist die Bedeutung von Bewegung überhaupt sinnlos.

Fügen wir eine zweite Punktmasse hinzu, so könnten wir wenigstens eine Entfernung zwischen beiden festlegen.

Man sieht: Um von einer Bewegung eines Körpers im dreidimensionalen Raum sprechen zu können, benötigen wir wenigstens drei weitere Punktmassen in geeigneter geometrischer Position, auf welche wir die Position unseres Körpers beziehen können.

Betrachten wir zum Beispiel das Foucault - Pendel.

Man sagt, daß das Pendel seine Schwingungsachse im Raum beibehält und daß die Erde sich unter dem Pendel hinwendet.

Dies wird üblicherweise als Beweis für die Erddrotation gedeutet.

Diese Aussagen sind aber natürlich bedeutungslos, wenn wir nicht erklären, in Bezug auf welche materiellen Gebilde das Pendel seine Schwingungsachse im Raum beibehält.

In diesem Fall findet man, daß das Foucault'sche Pendel seine Schwingungsrichtung in Bezug auf die Fixsterne beibehält.

Die Diskussion von Bewegungen in einem beliebigen Riemann'schen Raum ist so verknüpft mit der Wahl aus -
g e z e i c h n e t e r Koordinatensysteme, welche die Mannigfaltigkeit (oder wenigstens Teile davon) überdecken.

Wenigstens in theoretischen Modellen findet man oft zwei verschiedene Klassen ausgezeichneter Koordinatensysteme, welche aus internen Eigenschaften des $g_{\mu\nu}$ - Feldes resultieren:

1. das Bündel lokaler Lorentz - Systeme und
2. falls die Mannigfaltigkeit eine nichtverschwindende Lie - Algebra von Killing - Vektorfeldern $\xi_{\tau_1}, \dots, \xi_{\tau_n}$ besitzt, ist diejenige Klasse von Koordinatensystemen ausgezeichnet, in der $g_{\mu\nu}$ unabhängig von $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ist.

Existiert etwa ein zeitartiges Killing - Vektorfeld in einem Gebiet G der Raum - Zeit, so findet man ein Koordinatensystem, in welchem der $g_{\mu\nu}$ - Tensor nicht von der Zeitkoordinate t abhängt.

Die Raum - Zeit ist dann also statisch in G .

Man mag das Mach'sche Prinzip so verstehen, daß beide Klassen von Koordinatensystemen eindeutig durch die Energieimpulsverteilung im Universum über geeignete Anfangswerte für die Einstein - Gleichung auf einer raumartigen Hyperfläche bestimmt sind.

Da wir im Weiteren das (klassische) Bremsstrahlungsproblem für eine Punktladung Q in einer Riemann'schen Raum - Zeit diskutieren wollen, wird die zweite Klasse ausgezeichneter Koordinatensysteme von besonderem Interesse sein.

Das Bremsstrahlungsproblem ist nämlich nur dann wohldefiniert, wenn die Mannigfaltigkeit ein zeitartiges Killing - Vektorfeld aufweist, wenigstens in einem großen Teil der

Raum - Zeit, welcher $\mathcal{I}^-$ und $\mathcal{I}^+$ einschließt (Siehe Anhang E).

Deswegen nehmen wir im Weiteren immer an, daß unsere Mannigfaltigkeit stationär ist mit einem zeitartigen Killing - Vektorfeld ξ_t , außer in einer schwarzen Loch - Region.

Man wähle dann ein Koordinatensystem $\mathcal{F}$ aus, in welchem $g_{\mu\nu}$ zeitunabhängig ist; wenn wir dann von Beschleunigungen materieller Objekte sprechen, meinen wir Beschleunigungen gegenüber $\mathcal{F}$.

Man würde dann erwarten, daß eine Probeladung strahlt, falls sie gegen $\mathcal{F}$ beschleunigt wird.

Dies wird im Weiteren bestätigt werden, und der starke Zusammenhang des klassischen Bremsstrahlungsproblemles mit der Struktur der Raum - Zeit im Großen wird klar zu Tage treten.

iii) Das klassische Bremsstrahlungsproblem im Minkowski - Raum

Nehmen wir an, die Raum - Zeit sei frei von Gravitationsfeldern und besitze die Struktur des Minkowski - Raumes. Ein zweidimensionaler Schnitt durch diese Raum - Zeit ist in Fig. 14a zu sehen; Fig. 14b zeigt ein Penrose - Diagramm^[61] (siehe Anhang E) des Minkowski - Raumes, wo die üblichen (t, z) Koordinaten transformiert wurden auf neue (ψ, ξ) Koordinaten, derart, daß die gesamte zweidimensionale Raum - Zeit in das durch die vier Punkte

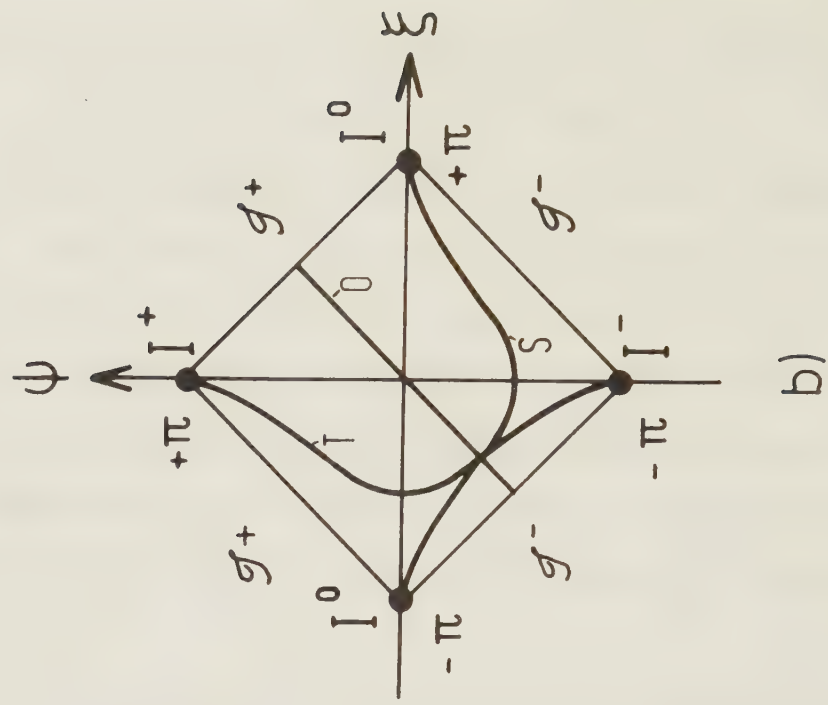
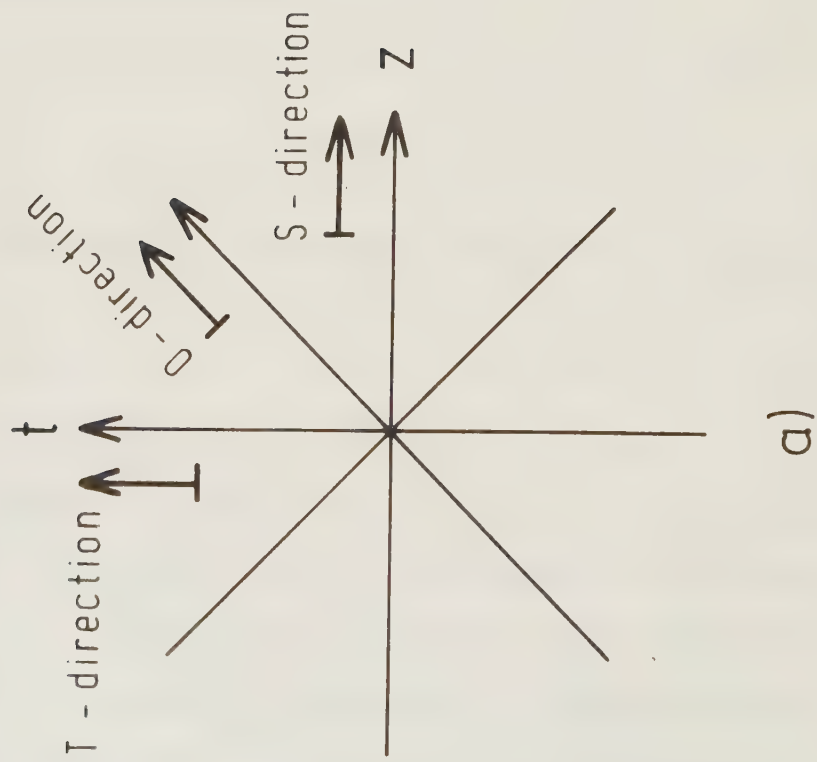


Fig.14

($\Psi = 0, \xi = \pm \pi$) und ($\Psi = \pm \pi, \xi = 0$) aufgespannte Quadrat zu liegen kommt.

In diesem Diagramm sind die asymptotischen Strukturen der Raum - Zeit ($I^-, \mathcal{I}^-, I^0, \mathcal{I}^+, I^+$) als Rand eingetragen (siehe Anhang E).

D.h. ein Penrose - Diagramm hat im Gegensatz zur üblichen Darstellungsweise der Raum - Zeit den Vorteil, daß die asymptotischen Strukturen der Raum - Zeit mit abgebildet sind.

Es ist

$$t + z = \tan \frac{1}{2} (\Psi + \xi)$$

$$t - z = \tan \frac{1}{2} (\Psi - \xi) \quad (15.1)$$

Wir schreiben die Maxwell - Gleichung im Minkowski - Raum als

$$\square A^\mu = 4\pi j^\mu \quad (15.2)$$

wobei j^μ die Stromdichte unserer Ladungsverteilung ist, A^μ das elektromagnetische Potential und $\square$ der vierdimensionale Laplace - Operator.

Die Lösungen von (8.2) können wir in folgender Gestalt aufschreiben

$$A^\mu(x) = A^{\mu(in)}(x) + \int_{\Omega^+} dx' D^{\text{ret}}(x-x') j^\mu(x') \equiv A^{\mu(in)}(x) + A^{\mu(ret)}(x) \quad (15.3a)$$

$$A^\mu_{(x)} = A^\mu_{(x)}^{(out)} + \int_{\Omega^4} dx' D^{adv}(x-x') j^\mu_{(x')} \equiv A^\mu_{(x)}^{(out)} + A^\mu_{(x)}^{(adv)} \quad (15.3b)$$

Hierbei ist $D^{ret} (adv)$ die retardierte (avancierte) Greens'sche Funktion des elektromagnetischen (EM) Feldes und $A^\mu_{(in,out)}$ sind Lösungen der homogenen Maxwell - Gleichung $\square A^\mu = 0$.

Nehmen wir an, wir schalten die Wechselwirkung zu einem Zeitpunkt ein und zu einem späteren wieder ab.

$A^\mu_{(in)}$ stellt dann das freie EM - Feld dar, welches vor dem Einschalten der Wechselwirkung bereits vorhanden war und $A^\mu_{(out)}$ ist das (freie) EM - Feld, welches nach Abschalten der Wechselwirkung im System bleibt.

Die erste Form von A^μ (15.3a) bedeutet, daß wir Randbedingungen auf $\mathcal{I}^-$ (in der frühen Vergangenheit) stellen und eine Ausbreitung der Wechselwirkung in die "Zukunft" hin betrachten.

In der zweiten Form (15.3b) bedeutet $A^\mu_{(out)}$ das freie EM - Feld auf $\mathcal{I}^+$ (die ferne Zukunft) und die Wechselwirkung geschieht rückwärts in der Zeit.

Wir können nun $A^\mu_{(out)}$ dazu benutzen, um das Bremsstrahlungsfeld beschleunigter Ladungen zu definieren, wenn wir nur $A^\mu_{(in)} = 0$ annehmen.

Der zweite Term von A^μ in (15.3a) führt dann zu den bekannten Liénard - Wiechert - Potentialen ^[70] des EM - Feldes, falls wir annehmen, daß sich nur eine Punktladung Q durch den Minkowski - Raum bewegt.

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = Q \left[\frac{(\vec{n} - \vec{v})(1 - v^2)}{x^3 R^2} \right]_{ret.} + Q \left[\frac{\vec{n}}{x^2 R} \times \{(\vec{n} - \vec{v}) \times \dot{\vec{v}}\} \right]_{ret.} \quad (15.4a)$$

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{n} \times \vec{E} \Big|_{\text{ret.}} \quad (15.4b)$$

Hier ist $\vec{n}$ der Einheitsvektor von Q zum Beobachtungspunkt P, $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit von Q, $\kappa \equiv 1 - \vec{n} \cdot \vec{v}$ und der Index ret bedeutet, daß sich alle Größen auf der rechten Seite von (15.4) auf die retardierte Zeit $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})$ beziehen.

$\vec{R}$ ist der Vektor von Q nach P (siehe Fig. 15).

Wir sehen, daß der Ausdruck für $\vec{E}(t, \vec{x})$ aus zwei Termen besteht.

Der erste Term beschreibt das Feld einer sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes Punktladung im Minkowski - Raum.

Diesen Term erhält man, wenn man das Coulomb - Feld einer ruhenden Punktladung geeignet Lorentz - transformiert.

Er ist das quasistatische Feld von Q, da er zu großen R - Werten wie $1/R^2$ abfällt.

Der Energiefluß dieses Teiles des EM - Feldes durch eine entfernte geschlossene Oberfläche verschwindet wie $1/R^2$.

Der zweite Term in (15.4a) entspricht einem Beschleunigungsfeld, welches wie $1/R$ abfällt.

Dieser ist der dominante Term für $R \gg \frac{1-v^2}{\dot{v} \sin \theta}$
(θ ist der Winkel zwischen $\dot{\vec{v}}$ und $\vec{n}$).

Im nichtrelativistischen Limes lautet dies einfach

$R \gg \frac{a}{\sin \theta}$, wobei a die reziproke Beschleunigung von Q darstellt.

Das Beschleunigungsfeld ist transversal polarisiert und

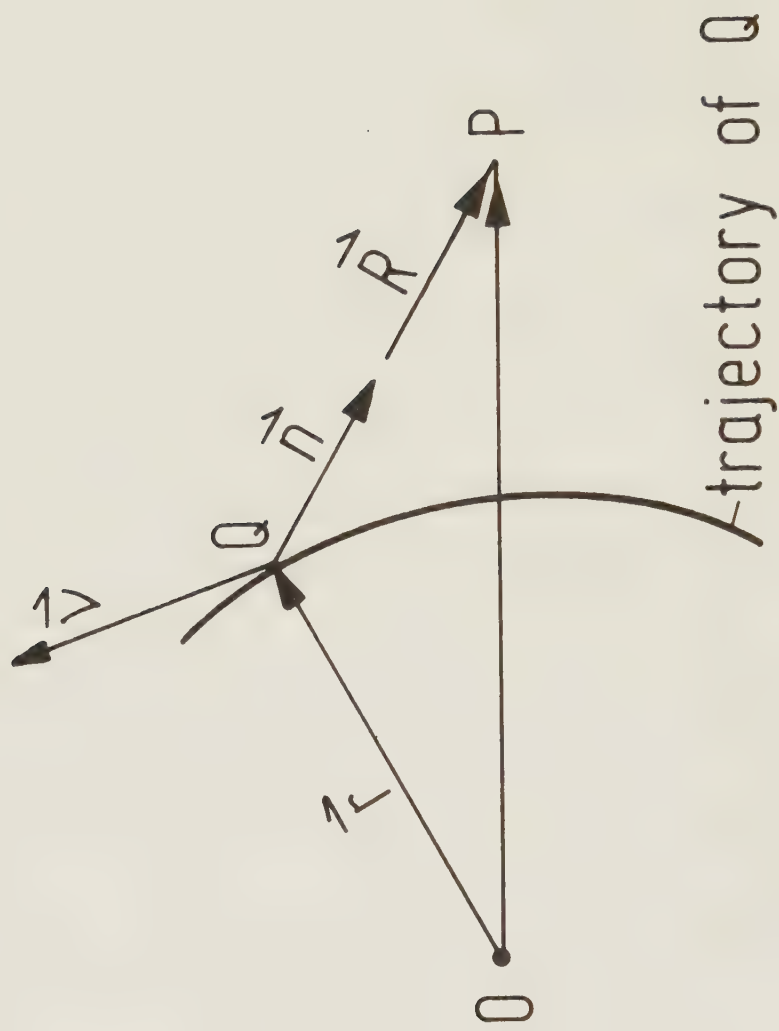


Fig.15

stimmt mit unserem Bremsstrahlungsfeld $A^{\mu(0,t)}$ auf γ^+ überein.

Fig. 16 zeigt eine Punktladung Q , welche in z - Richtung beschleunigt wird. Der gestreifte Teil der Fig. 16 zeigt die Region, in der das Beschleunigungsfeld gegenüber dem quasistatischen Anteil dominiert.

Die Polarisation des EM - Feldes dreht sich von longitudinal im Nahfeld zu transversal in der Fernzone.

In einer willkürlichen Beobachtungszone haben wir noch eine typische Wellenlänge, wie sie von Q emittiert wird, eingetragen.

Diese ist auch von der Ordnung $a/\sin \theta$.

Der Energiefluß des Beschleunigungsfeldes durch eine entfernte geschlossene Oberfläche ist konstant und unabhängig von R .

Im nichtrelativistischen Limes erhält man Larmors Formel für die totale abgestrahlte Energie pro Einheitszeit:

$$T_R = \frac{2}{3} Q^2 \ddot{\vec{v}}^2 \quad (15.5)$$

Wir wollen uns überlegen, durch welche Art der Integration diese Larmor'sche Formel zustande kommt ^[71].

Wenn man annimmt, daß die Wechselwirkung vor der Emissionszeit t_{ret} ausgeschaltet war, so ist es klar, daß die Formel nicht durch eine Integration zu einer festen Zeit t durch eine unendlich entfernte geschlossene Oberfläche zustande kam.

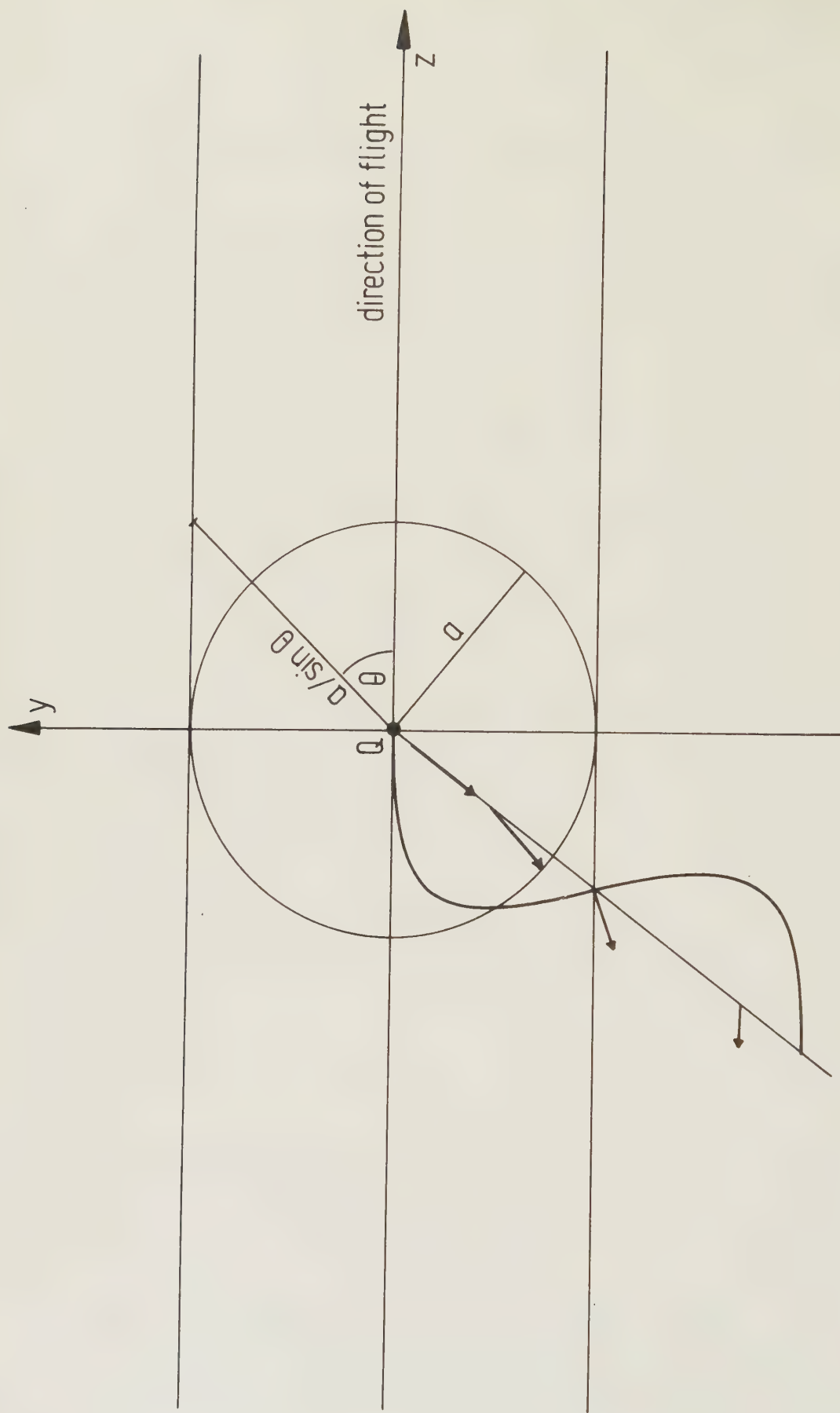


Fig.16

(Ein solcher Energiefluß würde immer verschwinden.)

Wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit können EM-Wellen, welche von Q ausgesandt werden, niemals in endlicher Zeit die unendlich entfernte Fläche erreichen.

Die Formel kommt vielmehr so zustande:

Man fixiert die Emissionszeit t_{ret} und betrachtet die Lichtkugel, welche zur Zeit t_{ret} von Q emittiert wird. Die Lichtkugel entfernt sich von Q mit Lichtgeschwindigkeit und besitzt zur Zeit t einen Radius von $R = t - t_{\text{ret}}$.

Die Larmor'sche Formel erhält man dann durch Integration des Energieflusses durch diese Lichtkugel im Limes

$$R = t - t_{\text{ret}} \rightarrow \infty.$$

In der Sprache der asymptotischen Strukturen bedeutet dies, daß wir über $\mathcal{I}^+$ (nicht etwa über I^0) zu integrieren haben, um einen Wert für die emittierte Leistung zu erhalten.

Da das Beschleunigungsfeld auf $\mathcal{I}^+$ mit $A^{\mu(\text{out})}$ übereinstimmt, hätte man die Larmor'sche Formel genausogut aus dem Ausdruck für $A^{\mu(\text{out})}$ gewinnen können.

Allein durch die Diskussion der Liénard- Wiechert - Potentiale ist also klar geworden, daß klassische Bremsstrahlung eine nichtlokale Struktur in der Raum - Zeit repräsentiert.

Dies wird im Weiteren bestätigt werden.

iv) Bewegte Beobachter und der Fall der gleichförmig beschleunigten Ladung

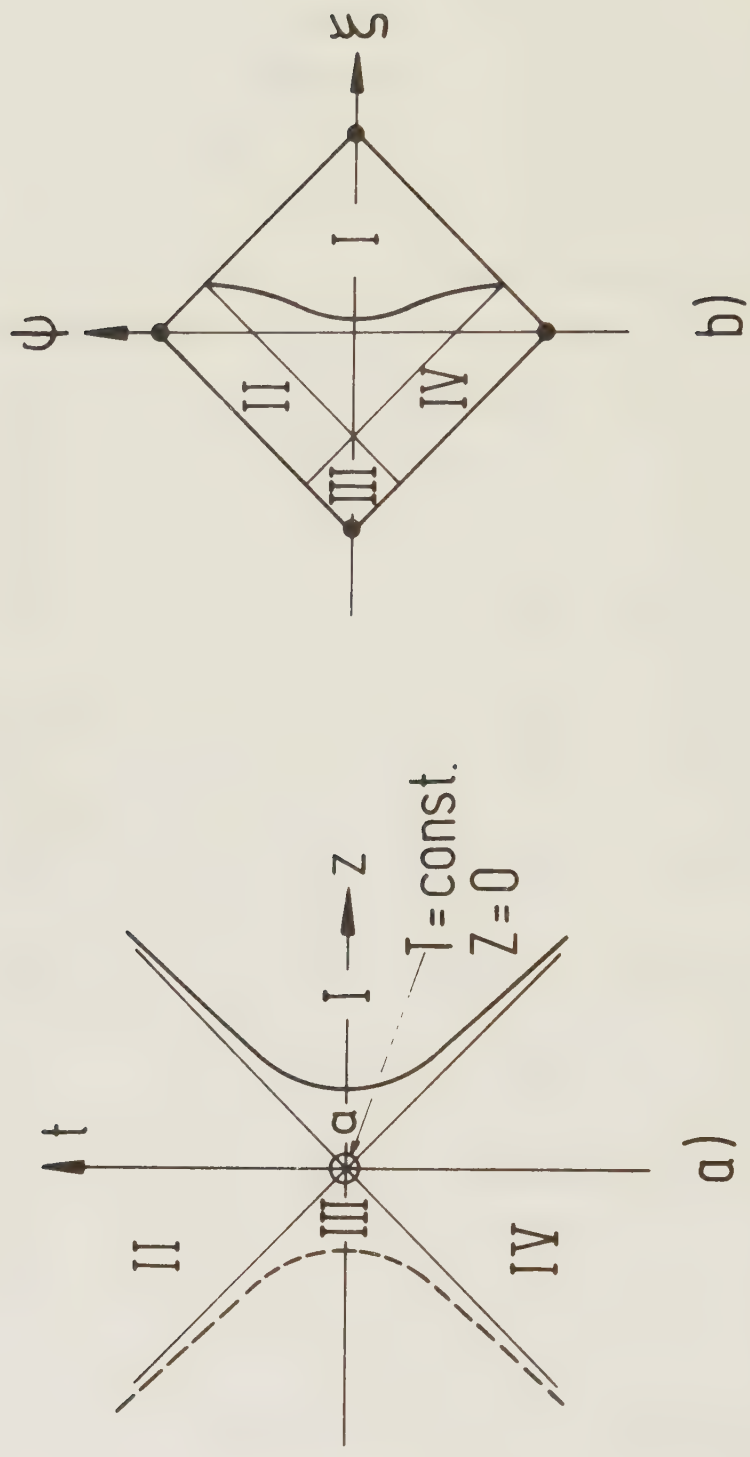


Fig.17

Da wir Bremsstrahlung durch das Vektorfeld $A^{\mu(out)}$ definierten, hängt das Auftreten einer solchen Strahlung nicht vom Bewegungszustand des Beobachters ab.

Denn ist ein Vektorfeld in einem Koordinatensystem von Null verschieden, so wird es in keinem Koordinatensystem global, d.h. in der ganzen Raum - Zeit verschwinden können.

(Im Gegensatz zur Möglichkeit, Photonen bzw. Fermionen mit Hilfe eines Detektors nachzuweisen, wie wir in Kap. XII sahen; ein Detektor kann Anregungen erfahren, auch wenn $A^{\mu(out)} = 0$.)

Dies ist jedoch nur ein Teil der Wahrheit.

Der andere hängt damit zusammen, daß man für beschleunigte Beobachter kein natürliches, globales Koordinatensystem, welches die ganze Mannigfaltigkeit überdeckt, finden kann.

Im Allgemeinen existiert ein mit dem Beobachter B verbundenes Koordinatensystem nur bis zu einer Entfernung der Größenordnung $(\sim a = \frac{c^2}{g})$ von B, wenn sich B mit einer Beschleunigung g gegen ein Inertialsystem bewegt.

Betrachten wir eine gleichförmig beschleunigte Punktladung Q im Minkowski - Raum $\mathcal{M}$.

Q werde längs der z - Achse beschleunigt.

Im (t, z) Unterraum von $\mathcal{M}$ ist die Trajektorie von Q dann durch (12.3) (siehe Fig. 17a) gegeben und Fig. 17b zeigt ein Penrose - Diagramm dieser Situation.

Der Beobachter ruhe zunächst im Minkowski - Raum.

Sei $X_p = (t_p, \vec{x}_p)$ der Beobachtungspunkt, $X_q = (t_q, \vec{x}_q)$ der "Emissionspunkt", welcher mit X_p durch eine Nulllinie verbunden ist.

Da die Trajektorie von Q in $\mathcal{M}$ bekannt ist, können wir die retardierte (avancierte) Zeitkoordinate t_q durch den Beobachterzeitpunkt t_p ausdrücken.

t_q berechnet sich aus

$$t_q = t_p - R(t_q) \quad (15.6a)$$

Hier ist $R(t_q)$ wieder die Entfernung vom Beobachtungspunkt X_p zum Emissionspunkt X_q .

Aus (15.6a) ergibt sich

$$(t_q - t_p)^2 = R^2(t_q) = s_p^2 + (z_p - z_q)^2 \quad (15.6b)$$

z_q können wir nach $z_q^2 - t_q^2 = a^2$ durch t_q ausdrücken und die resultierende quadratische Gleichung nach t_q auflösen.

Man erhält

$$t_q = \frac{t_p \eta + z_p \xi}{2 [t_p^2 - z_p^2]} \quad (15.7)$$

$$\text{mit } \eta \equiv t_p^2 - s_p^2 - a^2 - z_p^2 \quad \xi \equiv [\eta^2 + 4a^2(t_p^2 - z_p^2)]^{1/2}$$

$$= \left[(a^2 + t_p^2 - s_p^2 - z_p^2)^2 + 4a^2 s_p^2 \right]^{1/2} \quad (s_p^2 = x_p^2 + y_p^2)$$

In der Literatur gab es nun große Verwirrung über das

Strahlungsproblem einer Punktladung in hyperbolischer Bewegung.

Ein Grund dafür ist, daß die Gleichung (12.4) in Wirklichkeit zwei verschiedene Trajektorien beschreibt:

Die durchgezogene Trajektorie im Sektor I der Fig. 18a und deren gestricheltes Spiegelbild im Sektor II.

Dies liegt einfach an der quadratischen Form von Gleichung (12.4), d.h. $z = \pm \sqrt{t^2 + a^2}$.

Wir wollen im Folgenden nur eine Punktladung betrachten, welche sich in Sektor I des Minkowski - Raumes bewegt.

Nehmen wir das Pluszeichen in Gleichung (15.7), so findet man durch Ausrechnung, daß gilt

$$t_q < t_p \quad \text{falls } z_p + t_p > 0$$

und

$$t_q > t_p \quad \text{falls } z_p + t_q < 0,$$

d.h. t_q beschreibt eine retardierte Zeit für $z_p + t_p > 0$.

Diese Situation ist in Fig. 18 zu sehen.

Mit Hilfe von (15.7) können wir dann die Potentiale und Felder von Q bestimmen.

In Sektor I erhält man für das retardierte Potential ($x^0 = t$, $x^1 = \xi$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$)

$$\begin{aligned} \phi &= A^0 = Q \left[\frac{1}{xR} \right]_{\text{ret.}} = Q \frac{(\xi^2 + z^2 + a^2 - t^2)t - \xi t}{\xi [z^2 - t^2]} \\ A^3 &= Q \left[\frac{v^3}{xR} \right]_{\text{ret.}} = Q \frac{(\xi^2 + z^2 + a^2 - t^2)t - \xi z}{\xi [z^2 - t^2]} \end{aligned} \quad (15.8)$$

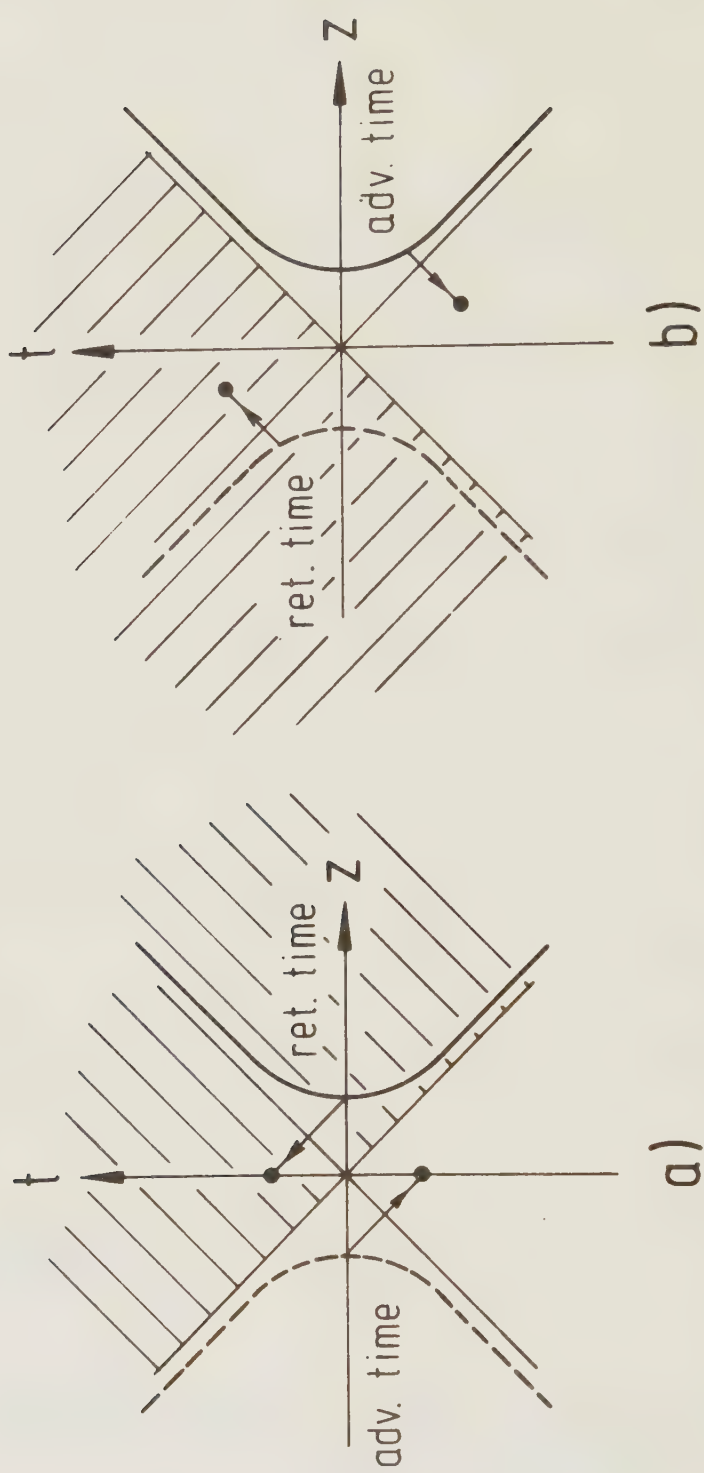


Fig.18

woraus man folgende nichtverschwindende Komponenten des EM - Feldes gewinnt:

$$\begin{aligned} E_s &= Q \frac{8a^2 s z}{\xi^3} \\ E_z &= -Q \frac{4a^2}{\xi^3} [a^2 + t^2 + s^2 - z^2] \\ B_\phi &= Q \frac{8a^2 s t}{\xi^3} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Bei der Berechnung der avancierten Potentiale ist

$\alpha_{\text{adv}} = 1 + \vec{n} \cdot \vec{v}_{\text{adv}}$, da bei Zeitumkehr der Geschwindigkeitsvektor sein Vorzeichen umdreht.

Man findet für die avancierten Potentiale in I:

$$\begin{aligned} \phi = A^0 &= Q \frac{(s^2 + z^2 + a^2 - t^2)z + \xi t}{\xi [z^2 - t^2]} \\ A^3 &= Q \frac{(s^2 + z^2 + a^2 - t^2)t + \xi z}{\xi [z^2 - t^2]} \end{aligned} \quad (15.10)$$

welche zu den gleichen Feldern in I führen, da die zweiten Terme in A^μ reine Eichterme sind.

D.h. das Bremsstrahlungsfeld verschwindet identisch in Sektor I $\subset \mathcal{M}$.

Es ist klar, daß $A^{\mu(\text{out})}$ in F nicht verschwindet, und es wurde zuerst von Fulton und Rohrlich nachgewiesen ^[71], daß die Punktladung in hyperbolischer Bewegung im Einklang mit der Larmor'schen Formel strahlt.

Im Einklang mit dem soeben gewonnenen Resultat ist es je-

doch nicht erstaunlich, daß wir ein rein statisches Feld im Rindler - Raum erhalten, wenn wir die retardierten Potentiale und Felder in das mitbewegte Koordinatensystem (v, X, Y, u) transformieren.

Man transformiert dazu einfach das Vektorfeld A^μ in Sektor I gemäß einer Tensortransformation $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$ in das mitbewegte Koordinatensystem.

Die Koordinatentransformation $x'^\mu(x^\nu)$ ist durch Gleichung (12.5) gegeben.

Diese Transformation wurde zuerst von Bradbury ^[86] ausgeführt.

Die Potentiale bzw. Felder von Q lauten im Rindler - Raum

$$\tilde{A}^0 = \frac{Qa}{\tilde{\xi}} \frac{a^2 + s^2 + u^2}{u^2} \quad \tilde{A}^3 = -\frac{Q}{u} \quad (15.11)$$

$$\tilde{E}_s = \frac{8Qau^2}{\tilde{\xi}^3} \quad \tilde{E}_u = \frac{4Qau}{\tilde{\xi}^3} [u^2 - a^2 - s^2] \quad (15.12)$$

$$\tilde{\xi} \equiv \left\{ [a^2 + s^2 - u^2]^2 + 4a^2 s^2 \right\}^{1/2} \quad s^2 = X^2 + Y^2$$

wobei A^3 ein reiner Eichterm ist und weggeeeicht werden kann.

Das rein statische Feld im Rindler - Raum (RS) bedeutet nicht, daß die beschleunigte Ladung Q in $\mathcal{M}$ nicht strahlt, da $\mathcal{V}^+$ nicht vollständig im RS enthalten ist.

D.h. es wäre bedeutungslos, eine Larmor - Invariante im RS zu konstruieren.

Dieses Beispiel zeigt deutlich, was wir unter einer nichtlokalen Struktur in der Raum - Zeit verstehen:

Um das Auftreten gewisser Phänomene wie die Bremsstrahlung zu verstehen, genügt es nicht, Teile der Raum - Zeit zu betrachten, sondern die ganze Mannigfaltigkeit mit ihren asymptotischen Strukturen muß in Betracht gezogen werden.

(Der asymptotische Bereich kann natürlich im praktischen Fall nur wenige cm von der wechselwirkenden Region entfernt sein.)

v) Klassische Bremsstrahlung und das Äquivalenzprinzip

In unserer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mögen Gravitationsfelder anwesend sein.

Die Maxwell - Gleichung lautet dann

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \sqrt{-g} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} [A_{\beta|\alpha} - A_{\alpha|\beta}] \right\} = 4\pi j^\mu \quad (15.13)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst an, daß ein globales zeitartiges Killing - Vektorfeld auf $\mathcal{M}$ existiert und $\mathcal{M}$ asymptotisch flach sei.

($\mathcal{M}$ mag z.B. durch das Gravitationsfeld eines Sternes bestimmt sein.)

Sei $\mathcal{F}$ ein Koordinatensystem, welches unabhängig von der globalen Zeitkoordinate t ist, welche mit dem Killing - Vektorfeld verknüpft ist.

Es ist klar, daß das Feld einer in $\mathcal{F}$ ruhenden Ladung statisch ist und keine Bremsstrahlung auftritt.

Dies resultiert einfach aus dem Umstand, daß das System keine Dynamik enthält.

Die Ladung Q wird jedoch Bremsstrahlung abstrahlen, falls sie gegen $\mathcal{F}$ beschleunigt wird, wie dies z.B. bei einer frei fallenden Ladung im Feld einer zentralen Massenverteilung der Fall ist.

Man mag deswegen nach der Gültigkeit des Äquivalenzprinzips fragen, wenn man die Bremsstrahlung elektrischer Ladungen mit in Betracht zieht.

Die experimentell gesicherte Äquivalenz von träger und schwerer Masse ($\frac{m_t}{m_s} = 1 \pm 10^{-12}$) wird in der Einstein'schen Theorie der Gravitation dadurch gewährleistet, daß man den $T_{\mu\nu}$ - Tensor der Materie, welcher die trägen Massen enthält, als Quelle des Gravitationsfeldes auf die eine Seite der Einstein'schen Gleichung schreibt.

Dieses Prinzip bedeutet jedoch nicht, daß bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die physikalische Situation in einem lokalen Lorentz - System vollständig äquivalent zu der in einem Inertialsystem im Minkowski - Raum wäre.

So kann man etwa die Gezeitenkräfte, d.h. die Komponenten des Riemann'schen Krümmungsfaktors, welche in jedem wahren Gravitationsfeld auftreten, lokal ausmessen, d.h. in einer beliebig kleinen Umgebung des Raum - Zeitpunktes x . Ein Proton und ein Neutron (wir vernachlässigen Spineffekte) folgen nicht der selben Trajektorie im Gravita-

tionsfeld, da das Proton an das EM - Feld koppelt und daher Reibungskräfte erfährt, obwohl diese sehr klein und praktisch nicht meßbar sind.

Eine grobe Abschätzung der Strahlungsrückwirkung einer in einem Gravitationsfeld frei fallenden Punktladung Q können wir über die Abraham - Kraft gewinnen,

$$K_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{c^3} \ddot{r}, \text{ welche einen Impulsverlust von}$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{c^3} \ddot{r} \text{ entspricht.}$$

p_{rad} können wir als $p_{\text{rad}} = mc \frac{\sigma}{l}$ schreiben, wobei l die Länge bezeichnet, welche mit der Beschleunigung

$\ddot{r}$ ($l = \frac{c^2}{\ddot{r}}$) verknüpft ist, σ ist die charakteristische

Länge, welche mit der Larmor - Formel assoziiert ist

$$(\sigma = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{mc^2}), m \text{ ist die Masse von } Q.$$

Nehmen wir an, unsere Meßgeräte wären so gut, daß wir Impulse der Ordnung p_{rad} gerade noch messen könnten.

Dann folgt aus der Unschärferelation die Beziehung

$$\Delta r \geq \lambda \frac{1}{\sigma}, \text{ wobei } \lambda \text{ die Compton - Wellenlänge von } Q \text{ bezeichnet.}$$

Das bedeutet, daß die Strahlungsreibung eines Elektrons ($\frac{\lambda}{\sigma} = 206$) im Gravitationsfeld der Erde so klein ist, daß sie prinzipiell nicht in einem Umkreis von 200 Lichtjahren vom Elektron nachgewiesen werden kann:

$$l(\text{Erde}) = \frac{c^2}{g} = 10^{16} \text{ m, d.h.}$$

$$\Delta r \geq \frac{h}{\sigma} l \approx 206 l = 2 \times 10^{18} \text{ m} = 200 \text{ Lichtjahre.}$$

Dies bestätigt nur wieder den Umstand, daß das Auftreten klassischer Bremsstrahlung von nichtlokaler Natur ist: Sie kann lokal nicht nachgewiesen werden.

Da nun die EM - Wechselwirkung langreichweitig ist, reagiert das Coulomb - Feld einer frei fallenden Ladung in einer genügend großen Entfernung von Q mit den Gradienten des $g_{\mu\nu}$ - Feldes und produziert Bremsstrahlung.

Es ist in diesem Zusammenhang noch interessant, zu bemerken, daß die Strahlung, welche durch Gravitationsbeschleunigung zustande kommt, unterdrückt ist gegenüber der Bremsstrahlung rein elektromagnetisch wechselwirkender Ladungen.

Dies wurde von R. Matzner ^[107] gezeigt, der auch ein simples Bild für dieses Verhalten liefert:

Wenn eine hochrelativistische Probeladung q elektromagnetisch von einer größeren Ladung Q abgelenkt wird, so erscheint das Coulomb - Feld von q im Bezugssystem von Q als Welle virtueller Photonen.

Wird q nun durch das EM - Feld von Q abgelenkt, so wird ein Teil der virtuellen Photonenwolke von q abgeschüttelt. Diese abgeschüttelten Photonen werden reell und bilden die produzierte Bremsstrahlung, welche γ^+ erreicht.

In der entsprechenden Situation der rein gravitativen Ablenkung können die virtuellen Gravitonen oder Photonen dem abgelenkten Probekörper folgen, da Gravitonen wie Photonen ebenso wie der Probekörper, der gravitativen

Wechselwirkung unterliegen.

(Diese zwei verschiedenen Situationen sind in Fig. 19 abgebildet.)

Dies ist der Grund, warum Bremsstrahlung aufgrund rein gravitativer Ablenkung gegenüber derjenigen, welche durch EM - Wechselwirkung zustande kommt, unterdrückt ist.

vi) Starke Gravitationsfelder, Ereignishorizonte etc.

Wir wollen nun auf Situationen eingehen, in denen starke Gravitationsfelder die globale, kausale Struktur der Raum - Zeit verschieden werden lassen von der des leeren Minkowski - Raumes.

Da eine derartige Diskussion in der Literatur vorliegt, können wir uns kurzfassen.

Es ist wohlbekannt, daß die Gravitation so stark werden kann, daß geschlossene Nullflächen ^[68] ("closed trapped surfaces") oder Raum - Zeit - Singularitäten in den üblichen Gravitationstheorien auftreten.

Im Allgemeinen mag die Situation überaus kompliziert sein:

Eine Raum - Zeit Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mag gar keinen Killing - Vektor besitzen oder sie mag nicht asymptotisch flach sein.

In solchen Mannigfaltigkeiten ist es schwer (oder unmög-

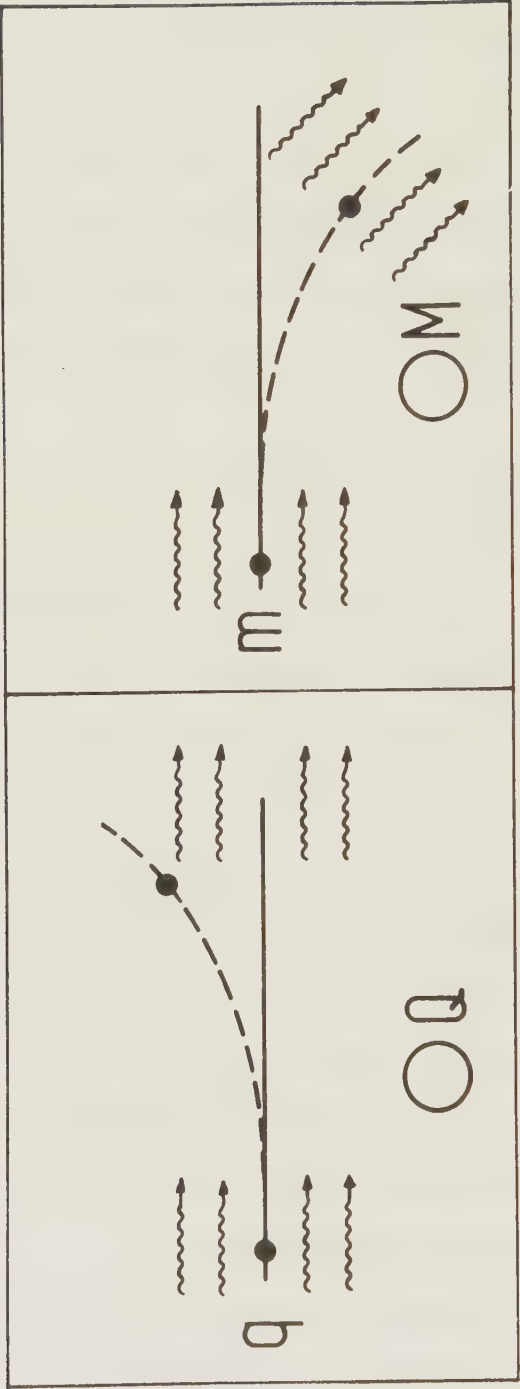


Fig.19

lich), physikalische Größen wie Energie, Drehimpuls etc. zu definieren.

Der Einfachheit halber betrachten wir deshalb Gravitationsfelder, welche aus dem Kollaps eines neutralen nicht rotierenden Sternes resultieren sollten.

Ein Penrose - Diagramm einer solchen Mannigfaltigkeit sieht man in Fig. 20.

Gemäß des Theorems von Birkhoff^[45] ist im Außenraum des kollabierenden Objektes, welches als sphärisch symmetrisch angenommen wird, das $g_{\mu\nu}$ - Feld identisch mit dem Schwarzschild - Feld.

In Fig. 20 ist H der (zukünftige) Ereignishorizont des Schwarzschild - Feldes (SF) und S dessen Singularität, wo die Krümmung divergiert.

Wie sieht nun das EM - Feld einer Punktladung Q im SF aus? Wir betrachten dazu zwei Beispiele, nämlich den Fall, daß Q im Feld frei fällt.

Wir nehmen dazu an, daß der Beobachter sich in einem asymptotischen $\mathcal{F}$ - System befindet.

Da die globale Struktur der Raum - Zeit nun nicht mehr zur Struktur des Minkowski - Raumes äquivalent ist, reicht es jetzt nicht mehr aus, die Maxwell - Gleichung (15.13) mit Randbedingungen auf $\mathcal{J}^-$ zu lösen.

Ferner muß man weitere Randbedingungen auf dem Ereignishorizont stellen.

Das erste Problem, d.h. den Fall der stationären Ladung, wurde zuerst von J. Cohen und R. Wald gelöst^[108], welche

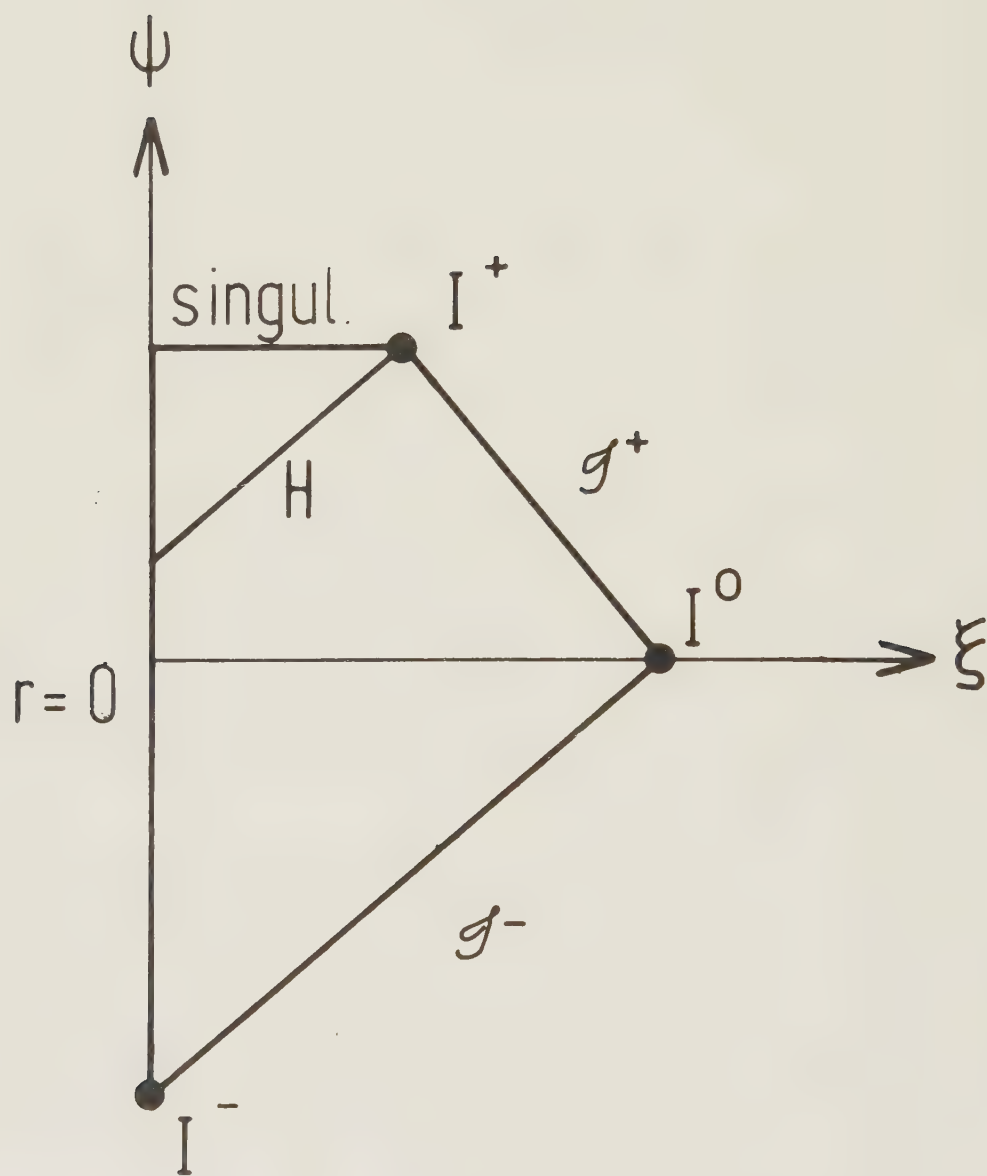


Fig.20

fordern, daß die Lagrange - Dichte des freien EM - Feldes $\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ auf H endlich bleibt (d.h. bei $r = r_s$), falls der radiale Abstand von Q zum Gravitationszentrum größer als r_s ist.

Für diesen Fall der ruhenden Punktladung im SF erhält man ein elektrostatisches Feld.

Die Feldlinien sieht man in Fig. 21 für verschiedene Positionen von Q im SF.

Das zweite Problem der frei fallenden Punktladung im SF wurde zuerst von R. Ruffini^[109, 110] gelöst, welcher fordert, daß von der Region innerhalb des Ereignishorizontes keine EM - Wellen in die statische Außenregion der Raum - Zeit gelangen können.

Die numerische Rechnung von Ruffini zeigt, daß eine im SF frei fallende Punktladung strahlt.

In Fig. 22 sieht man den Dipol-und Quadrupolanteil der Strahlung, welche nach γ^+ emittiert wird, falls Q zunächst bei $r \rightarrow \infty$ in Ruhe war und dann frei gegen den Ereignishorizont fällt.

Diese zwei Resultate wird man nach der vorangegangenen Diskussion erwartet haben.

Der globale topologische Charakter der Mannigfaltigkeit führt zu weiteren Effekten:

Wie zuerst S. Hawking^[50, 51] zeigte, emittiert ein Schwar-

zes Loch, welches durch Gravitationskollaps entsteht, eine stationäre Rate von Teilchen aller Art mit einem thermischen Spektrum.

Die Temperatur dieser Strahlung ist gerade durch die Oberflächengravitation $\kappa = (4GM)^{-1}$ des Schwarzen Loches gegeben ^[112-114]:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (15.14)$$

Der thermische Charakter der Schwarzlochstrahlung resultiert aufgrund der globalen Topologie des SF, ähnlich wie im Fall der Rindler - Temperatur (vgl. Kap. XIV, S.111). Man kann zeigen, daß die Teilchenemission eines Schwarzen Loches vollständig zufällig und ungeordnet vonstatten geht ^[113-115], sodaß wir sie als Rausch - Signal im Sinne der Informationstheorie deuten können.

In diesem Sinne repräsentiert die Hawking - Temperatur (15.14) die asymptotische Rausch - Temperatur eines Schwarzen Loches, welches durch Kollaps entstand.

Wegen des üblichen Transformationsgesetzes für Temperatur ^[116] wird man annehmen, daß nahe des Schwarzen Loches ein stationärer Beobachter eine effektive Rausch - Temperatur von

$$T_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} T_H \quad (15.15)$$

erfährt, welche auf dem Ereignishorizont divergiert. Dies

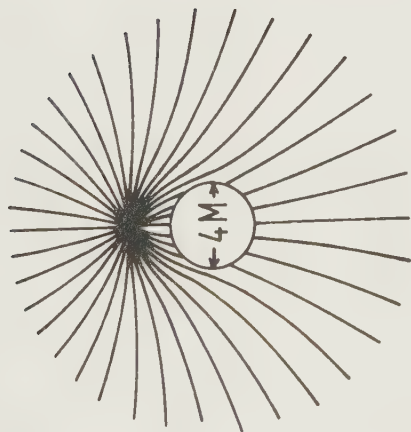
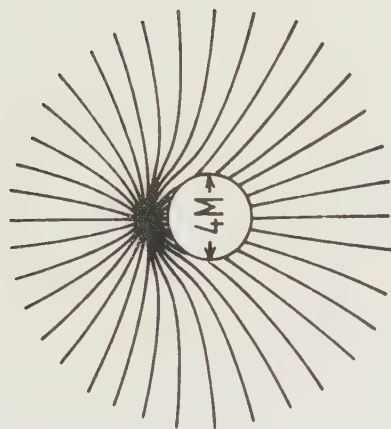
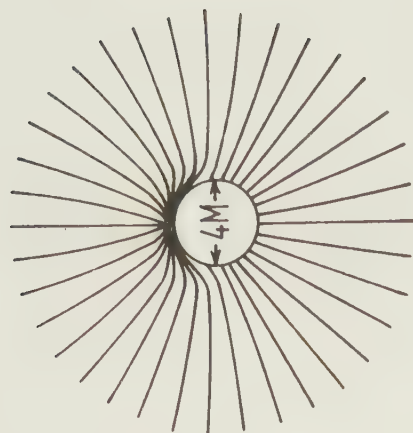


Fig. 21

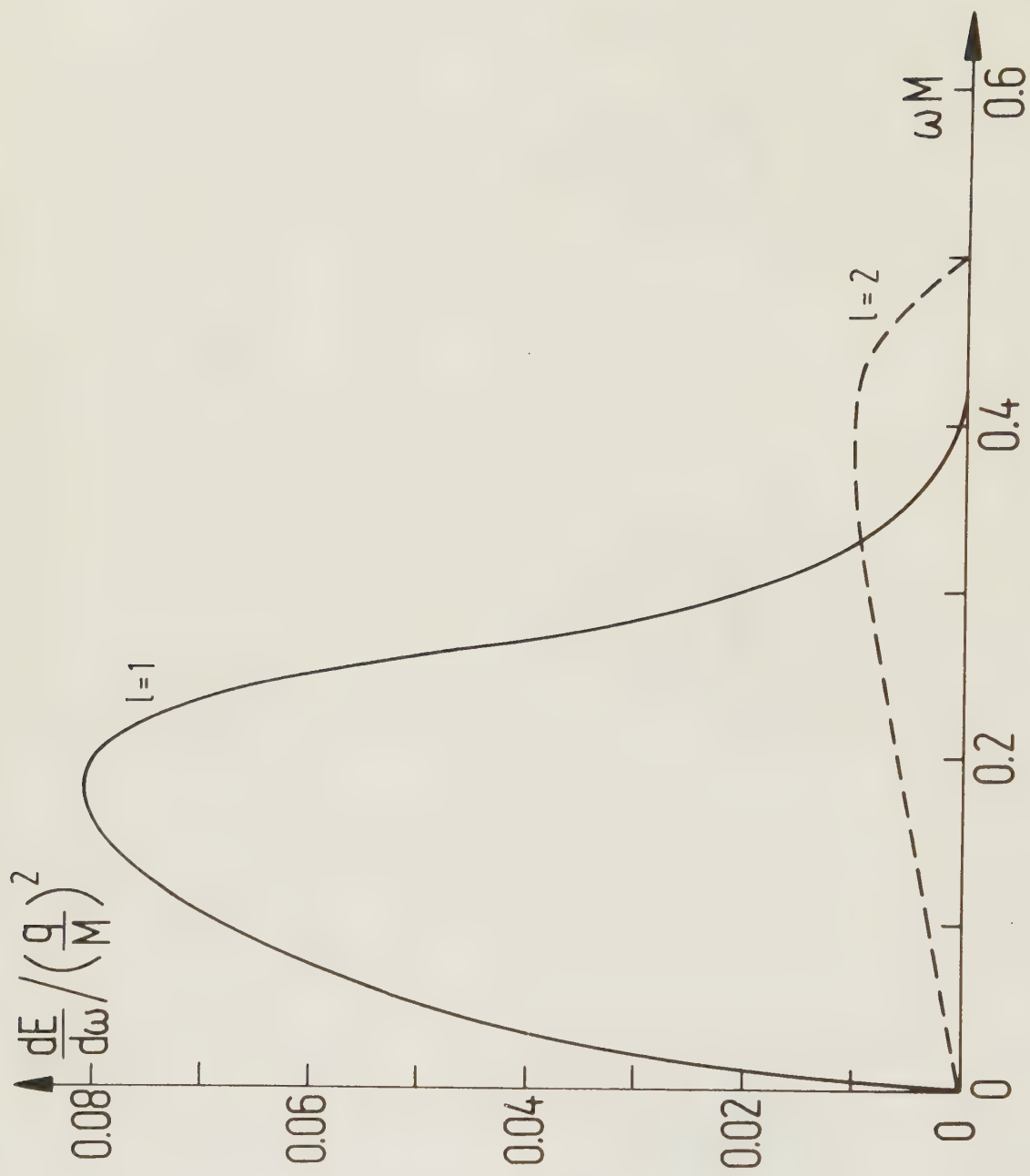


Fig. 22

kann man verstehen, da eine unendlich große Beschleunigung nötig wäre, um den Beobachter am Ereignishorizont zu halten..

Diese effektive Rausch - Temperatur wird für einen frei fallenden Beobachter nicht auftreten, genauso wie die Rindler - Temperatur für einen ruhenden Beobachter im Minkowski - Raum keinen Sinn hat.

Wir erwähnen schließlich noch, daß es noch mehr komplizierte Situationen starker Gravitationsfelder gibt, wo neue globale Strukturen der Raum - Zeit auftreten (wie z. B. Ergosphären^[117]), die zu neuen interessanten Phänomenen, wie dem Penrose - Effekt^[118] der Superradianz rotierender Schwarzer Löcher, führen.

Beim Penrose - Effekt fällt ein Teilchen in die Ergosphäre eines rotierenden Schwarzen Loches und produziert dort ein Paar.

Davon fällt ein Teilchen ins Schwarze Loch und das andere verläßt die Ergosphäre und fliegt mit größerer Energie als das ankommende Teilchen davon, wobei dem Schwarzen Loch Energie entzogen wird.

XVI Äußere Yang - Mills - Felder

Die Konstruktion klassischer Yang - Mills - Potentiale und die Diskussion über deren Stabilität bei wachsender

[31,32]

Quellstärke stammt von Mandula

$SU(3)$ - Eichfelder sollten in der Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik) eine bedeutende Rolle spielen.

So treten aber unter den bisher gefundenen Teilchen nur Colorsingletts auf (Teilchen ohne Farbe), und es fragt sich daher, ob man aus der QCD heraus das Confinement von gefärbten Quarks verstehen kann.

Dies zu zeigen, ist offenbar im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Störungstheorie bislang nicht möglich, sodaß uns eine Diskussion klassischer Yang - Mills - Felder vielleicht weiterhilft.

i) Klassische Yang - Mills - Felder

Statt die Eichfelder A^a ($a = 1, \dots, n$) in der Theorie zu benutzen, geht man häufig zu $(n \times n)$ - Matrizen

$$A = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \lambda^a A^a \text{ über.}$$

So ordnet man jeder Größe mit einem Yang - Mills - Index a eine Matrix zu.

Der Strom äußerer M Yang - Mills - Ladungen sei dann durch

$$j_\mu(\vec{x}) = \delta_{\mu 0} \sum_{i=1}^M Q_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (16.1)$$

gegeben und die Yang - Mills - Gleichung lautet einfach

$$F_{\mu\nu,\mu} + [A_\nu, F_{\mu\nu}] = -4\pi j_\mu \quad (16.2)$$

mit

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + [A_\nu, A_\mu] \quad (16.3)$$

Man findet nun sehr simple Lösungen der Yang - Mills - Gleichung (16.2), wenn man die M - Quellen in kommutierende Richtungen im Yang - Mills - Raum legt, d.h. falls

$$[Q_i, Q_j] = 0 \quad \forall i, j \quad (16.4)$$

gilt.

Dieser Ansatz linearisiert die Yang - Mills Gleichungen und man erhält eine Menge entkoppelter Maxwell - Gleichungen bei Anwesenheit äußerer fester Quellen:

$$A_0 = \sum_{i=1}^M \frac{Q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \quad \vec{A} = 0 \quad (16.5)$$

(Man findet jeweils ein unabhängiges Maxwell - Feld für jede der kommutierenden Richtungen im Yang - Mills - Raum)

Diese Konfigurationen von Yang - Mills- Ladungen sind aber genau das, was man von klassischen Analogon von Mesonen und Baryonen erwartet.

Mesonen sollten aus quark und antiquark als color - singlett aufgebaut sein, Baryonen aus drei quarks als color-singlett.

Das klassische Analogon zum color - singlett sind Zustände mit $\sum_i Q_i = 0$.

Für Mesonen können wir die kommutierenden Matrizen

$Q_2 = -Q_1$ verwenden, für Baryonen z.B. die Matrizen

$$Q_1 = Z_1 q \left(\frac{\lambda_3}{4} + \frac{1}{4\sqrt{6}} \lambda_8 \right), \quad Q_2 = Z_2 q \left(-\frac{\lambda_3}{4} + \frac{1}{4\sqrt{6}} \lambda_8 \right) \text{ und}$$

$$Q_3 = Z_3 q \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}} \lambda_8 \right), \text{ welche Relation (16.4) erfüllen.}$$

ii) Überkritisches Farbvakuum und Color - Confinement

Im Feld äußerer vorgegebener Yang - Mills - Ladungen kann man nun zwei Probleme studieren:

Erstens die Stabilität des Yang - Mills - Feldes selbst unter Störungen, welche aufgrund von Quantenfluktuationen immer im System vorhanden sind, und zweitens die Stabilität des Dirac - Vakuums in äußeren Yang - Mills - Feldern.

Nach Mandula läßt sich die Stabilität des klassischen

Yang - Mills - Feldes so untersuchen, daß man für eine

Yang - Mills - Ladung $Q = Zq \frac{1}{2} \sum_a \lambda^a e_a$ das Yang - Mills -

Feld A_μ um das Yang - Mills - Coulomb - Feld

$A_\mu^{\text{coul}} = \frac{Q}{r} \delta_{\mu 0}$ entwickelt, d.h. $A_\mu = \frac{Q}{r} \delta_{\mu 0} + \hat{A}_\mu$ setzt.

Man linearisiert die Feldgleichung für die (als klein angesehenen) Fluktuationen $\hat{A}_\mu$ und sucht die Frequenzen der Fluktuationseigenmoden.

Für komplexe Frequenzen ω sollte das System dann instabil werden.

M. Magg ^[113] zeigte, daß in einer ausgezeichneten Eichung

für A_μ das soeben formulierte Stabilitätsproblem äquivalent ist zum Stabilitätsproblem der (masselosen) Klein - Gordon - Gleichung im äußeren Coulomb - Feld.

Dieses Problem wurde nun bereits im Jahre 1940 von Schiff, Snyder und Weinberg ^[122] behandelt und es erweist sich, daß die Klein - Gordon - Gleichung im äußeren Coulomb - Potential instabil ist, falls $|Q| > \frac{3}{2}q^2$.

Bei einer hinreichend großen Stärke des Yang - Mills - Feldes sollte also jenes automatisch zerfallen.

Betrachtet man dagegen ein "gefärbtes" Fermion im Yang - Mills - Feld einer Yang - Mills - Ladung, so reduziert sich das Stabilitätsproblem des Dirac - Vakuums auf die Stabilität der Dirac - Gleichung im äußeren Coulomb - Feld. Dieses Problem wurde bereits in der Einleitung kurz diskutiert.

Das Dirac - Vakuum ist also in starken äußeren Yang - Mills - Feldern instabil, was zu folgendem klassischen Bild führt:

Werden äußere Yang - Mills - Felder zu stark, so werden aus dem Vakuum spontan gefärbte Quarks gebildet, welche die Farbe der Yang - Mills - Ladungen abschirmen.

Dieses Bild mag bei der Diskussion des Quark - Color - Confinements von Interesse sein.

Schlußworte und Ausblick

Wir wollen zum Schluß noch einmal auf die Bedeutung der in dieser Arbeit erzielten Resultate eingehen. Es wurde die Stabilität des Dirac - Vakuums in äußeren Eichfeldern, insbesondere der Eichgruppe $U(1)$ und der Poincaré - Gruppe $\mathcal{P}$ untersucht. So wurde etwa aus der Struktur des Dirac - Operators im äußeren, statischen Magnetfeld oder in speziellen Gravitationsfeldern auf die Stabilität des Dirac - Vakuums geschlossen. Die gleiche Methode läßt sich anwenden, wenn wir Paarbildung in äußeren, statischen nicht-abelschen Yang - Mills Feldern studieren wollen. So findet man etwa, daß das Dirac - Vakuum in einem elektrostatischen Farbfeld E_z stabil ist, falls das Feld von konstanten, aber nicht kommutierenden Vektorpotentialen erzeugt wird.^{*)} Das Klein - Gordon Feld ist unter den gleichen Bedingungen instabil, falls die Feldstärke einen kritischen Wert übersteigt und man findet, daß der $\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ Term in der iterierten Dirac - Gleichung die Vakuuminstabilität bei den Fermionen verhindert.

Die Poincaré - Gruppe ist eine nicht-abelsche Gruppe, wie auch die Gruppe $SU(n)$. Man wird deshalb erwarten, daß die Eichtheorie der Poincaré - Gruppe (die Einstein-Cartan Theorie) weitgehende Parallelen besitzt zu den Yang - Mills Eichtheorien. Dies ist auch der Fall. So mag etwa das in dieser Arbeit eingeführte Vakuum mit Spin, was den überkritischen Zustand des Dirac-Systems bei Anwesenheit starker Torsionsfelder beschreibt,

^{*)} M.Soffel, B.Müller, W.Greiner, wird publiziert.

bei der Diskussion überkritischer Gluonenfelder eine Rolle spielen. Bekanntlich kann ein starkes Farbmagnetfeld Gluonen aus dem Vakuum erzeugen, da hier die magnetische Spindipolwechselwirkung ausreicht, um virtuelle Gluonen voneinander zu trennen. Die Diskussion der Fermionen im Rindler - Raum mag man als Beschreibung eines Eichproblems auffassen: eichäquivalente Potentiale führen zu unterschiedlichen Vakuumsstrukturen. Die unterschiedlichen Vakua lassen sich topologisch beschreiben. Dieses Phänomen wird jedoch insbesondere in der Quantenchromodynamik diskutiert, wo es physikalische Auswirkungen zeigt. Wir sehen also, daß die in dieser Arbeit entwickelten Vorstellungen und ausgeführten Rechnungen nicht nur spezielle Phänomene, etwa in der experimentell schwer zugänglichen Gravitationswechselwirkung beschreiben, sondern darüber hinaus sicherlich Anwendung bei der Diskussion von Yang - Mills Feldern(etwa in der QCD) finden werden.

Anhang

A Zum Begriff der Mannigfaltigkeit

Das anschauliche Bild einer glatten Fläche, evtl. mit Löchern, Spitzen etc. faßt man analytisch in den Begriff einer Mannigfaltigkeit.

Im Kleinen sieht eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in n - Dimensionen so aus wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$, im Großen beschreibt eine Mannigfaltigkeit irgendeine topologische Struktur. So ist etwa die Oberfläche der Erde eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Zur Mannigfaltigkeit gehört ein Atlas von Karten, d.h. eine Ansammlung von Gebieten von $\mathcal{M}$, welche zusammen ganz $\mathcal{M}$ überdecken.

Ferner soll jeder (Land-) Karte ein Koordinatensystem zugeordnet sein.

Eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ besteht also auch aus einer topologischen Menge $\mathcal{M}$, einem Atlas und den dazugehörigen Koordinatensystemen.

Präziser: Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist ein Tripel $(\mathcal{M}, \{U_\alpha, \phi_\alpha\})$ mit

- i) $\mathcal{M}$ ist ein n -dimensionaler topologischer Raum
- ii) $\{U_\alpha\}$ ist ein Atlas, d.h. $U_\alpha \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha U_\alpha$
- iii) $\{\phi_\alpha\}$ sind lokale Koordinatensysteme, d.h.

$$\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow R_\alpha \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

und sei $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$:

$$\phi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$$

eine differenzierbare Abbildung einer offenen Menge

aus $\mathbb{R}^n$ in eine andere offene Menge $\mathbb{R}^n$.

Anschaulich heißt dies, daß falls ein Gebiet auf zwei (Land-) Karten auftaucht, die dazugehörigen Koordinatensysteme auf den zwei Karten verträglich sein sollten.

Beispiele:

Kugeloberfläche

Torusoberfläche

Oberfläche einer Bretzel

Apfeloberfläche mit diversen Wurmlöchern

etc.

mit geeignetem Atlas und Koordinatensystemen.

B Konstruktion der Wellenfunktionen $\psi_\omega^\pm, \psi_\omega$

Um $\psi_\omega^\pm$ zu konstruieren, benötigen wir das Verhalten der Teilwellenfunktionen $I, II \psi_\omega, F, P \psi_\omega^{(\pm)}$ in der Nähe des Lichtkegels ($u \rightarrow 0$).

Mit $\Lambda \equiv \omega \ln \frac{m}{2} + \arg \Gamma(\frac{1}{2} - i\omega)$ und $\Gamma \equiv |\Gamma(\frac{1}{2} - i\omega)|$ ist

$$\phi_\omega^- \rightarrow \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} e^{-i\pi/4} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{i\Lambda} e^{i\omega \ln u} \quad (B.1a)$$

$$\phi_\omega^+ \rightarrow -i \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} e^{-i\pi/4} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln u} \quad (B.1b)$$

$$\varphi_\omega^- \rightarrow \frac{e^{\pi\omega}}{\pi} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{i\Lambda} e^{i\omega \ln u} \quad (B.1c)$$

$$\varphi_\omega^+ \rightarrow -\frac{i}{\pi} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln u} \quad (B.1d)$$

$$\tilde{\varphi}_\omega^- \rightarrow \frac{e^{-\pi\omega}}{\pi} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{i\Lambda} e^{i\omega \ln u} \quad (B.1e)$$

$$\tilde{\varphi}_\omega^+ \rightarrow \frac{i}{\pi} \left(\frac{mu}{2}\right)^{-1/2} \Gamma e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln u} \quad (B.1f)$$

Nun ist

$$v \pm \ln u = \pm \ln(z \pm t) \quad \text{in } I, II$$

$$v \pm \ln u = \pm \ln(t \pm z) \quad \text{in } F, P \quad (B.2)$$

sodaß wir für $u \rightarrow 0$ schreiben können:

$$I \psi_{\omega} \rightarrow \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} e^{-i\pi/4} \left(\frac{m u}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{i\omega \ln(z-t)} \mp i e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(z+t)} \right) \quad (B.3a)$$

$$F \psi_{\omega}^{(+)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m u}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{-\pi\omega} e^{i\omega \ln(t-z)} \pm e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(t+z)} \right) \quad (B.3b)$$

$$F \psi_{\omega}^{(-)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m u}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{\pi\omega} e^{i\omega \ln(t-z)} \mp e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(t+z)} \right) \quad (B.3c)$$

$$\bar{I} \psi_{\omega} \rightarrow \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} e^{-i\pi/4} \left(\frac{m(-u)}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{i\omega \ln(t-z)} \pm i e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(-z-t)} \right) \quad (B.3d)$$

$$P \psi_{\omega}^{(+)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m(-u)}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{-\pi\omega} e^{i\omega \ln(z-t)} \mp e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(-z-t)} \right) \quad (B.3e)$$

$$P \psi_{\omega}^{(-)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m(-u)}{2}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{\pi\omega} e^{i\omega \ln(z-t)} \pm e^{-i\Lambda} e^{-i\omega \ln(-z-t)} \right) \quad (B.3f)$$

wobei wir folgende Schreibweise benutzten:

$$(A \pm B) \equiv \begin{pmatrix} A+B \\ 0 \\ A-B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

für Spinoren mit Spin rauf.

Man überlegt sich leicht, daß alle Spinoren in der Nähe des Lichtkegels die masselose Dirac - Gleichung

$$u \left[-i\alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2u} \right) \right] \psi = \omega \psi \quad (B.5)$$

erfüllen, da der Masseterm für $u \rightarrow 0$ nichts beiträgt.

(Man kann $m \neq 0$ ja in der Variablen u durch $u' = mu$ absorbieren.)

Um dies nachzuprüfen, schreibt man zweckmäßigerweise
 $u^{-1/2} = e^{-1/2 \ln u}$.

Aus der Diskussion der Dirac - Gleichung ohne Masse wissen wir dann, daß jeder Spinor der Form

$$\Psi = M \left(A e^{i(\omega + i/2) \ln u} \pm B e^{-i(\omega - i/2) \ln u} \right) e^{-i\omega v} \quad (\text{B.6})$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$ beliebig, Lösung der Dirac - Gleichung am Lichtkegel (B.5) ist.

Wegen $\phi_{\omega}^{-} \rightarrow N e^{i(\omega + \frac{i}{2}) \ln u}$ für $u \rightarrow 0$ erfüllt beispielsweise ϕ_{ω}^{-} trivialerweise die DGL für die Hankel - Funktion am Lichtkegel, welche dort einfach lautet:

$$\left[\frac{d}{d(\ln u)} \right]^2 \Psi = - \left(\omega + \frac{i}{2} \right)^2 \Psi \quad (\text{B.7})$$

Wir schreiben die Dirac - Gleichung am Lichtkegel (B.5) noch in Minkowski - Koordinaten auf:

$$i \left(z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi = \left[-i\alpha_3 \left(t \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \right) \right] \Psi \quad (\text{B.8})$$

Dies gilt auf allen Teilen des Lichtkegels durch 0.

Diese Gleichung (B.8) können wir aus der masselosen

Dirac - Gleichung $i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi = 0$ so gewinnen:

Wenn wir γ^{μ} ortsabhängig wählen, schreiben wir diese Gleichung als

$$\frac{i}{2} \{ \gamma^{\mu}, \partial_{\mu} \} \Psi = 0 \quad (\text{B.9})$$

Sei

-146-

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{z \gamma^0 + t \gamma^3}{\sqrt{z^2 - t^2}} \quad \tilde{\gamma}_3 = \frac{z \gamma^3 + t \gamma^0}{\sqrt{z^2 - t^2}} \quad (\text{B.10})$$

dann erfüllen die $\tilde{\gamma}^\mu$ die übliche Clifford - Algebra

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2 \eta^{\mu\nu} \quad (\text{B.11})$$

und die Gleichung $\frac{i}{2} \{\tilde{\gamma}^\mu, \partial_\mu\} \Psi = 0$ ist identisch mit Gleichung (B.8).

Aus (B.8) und (B.10) definieren wir uns den Dirac - Operator $\hat{D}$ am Lichtkegel; (B.8) läßt sich schreiben als

$$\hat{D} \Psi = 0 \quad \hat{D} = \frac{i}{\sqrt{z^2 - t^2}} \left[z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_3 \left(t \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{B.12})$$

Wir wenden nun $\hat{D}$ auf die Wellenfunktion (12.52) an und fordern, daß $\hat{D} \Psi_\omega^\pm = 0$ auf dem Lichtkegel durch 0 wird. Man findet z.B.

$$\begin{aligned} \hat{D}^I \Psi_\omega &= 2 e^{\pi \omega/2} e^{i\pi/4} (z^2 - t^2)^{-3/4} \left[(t+z) \begin{pmatrix} e^{i\omega \ln(z-t)} \\ e^{i\omega \ln(z-t)} \end{pmatrix} \delta(z+t) \Theta(z-t) \right. \\ &\quad \left. + i(z-t) \begin{pmatrix} e^{-i\omega \ln(z+t)} \\ -e^{-i\omega \ln(z+t)} \end{pmatrix} \Theta(z+t) \delta(z-t) \right] \quad (\text{B.13a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D} e^{\pi \omega/2} \tilde{F} \Psi_\omega^{(+)} &= 2i (z^2 - t^2)^{-1/2} (t^2 - z^2)^{-1/4} \left[(t+z) \begin{pmatrix} e^{-\pi \omega/2} e^{-i\omega \ln(t-z)} \\ e^{-\pi \omega/2} e^{-i\omega \ln(t-z)} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \cdot \delta(z+t) \Theta(t-z) + (z-t) \begin{pmatrix} e^{\pi \omega/2} e^{-i\omega \ln(t+z)} \\ -e^{\pi \omega/2} e^{-i\omega \ln(t+z)} \end{pmatrix} \Theta(t+z) \delta(t-z) \right] \quad (\text{B.13b}) \end{aligned}$$

Daher genügt es, die Terme mit endlicher Phase auf dem

Lichtkegel stetig zu machen.

Da u in den vier Sektoren verschiedene Bedeutung besitzt, müssen wir festlegen, wie wir etwa u in I in die übrigen Sektoren fortsetzen.

Wir tun dies nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ll}
 u^{-1/2} \xrightarrow{\quad} e^{-i\pi/4} u^{-1/2} & u^{-1/2} \xrightarrow{\quad} e^{i\pi/4} (-u)^{-1/2} \\
 \text{in I} & \text{in F} \qquad \qquad \text{in F} \qquad \qquad \text{in II} \\
 \\
 (-u)^{-1/2} \xrightarrow{\quad} e^{i\pi/4} (-u)^{-1/2} & (-u)^{-1/2} \xrightarrow{\quad} e^{-i\pi/4} u^{-1/2} \\
 \text{in II} & \text{in P} \qquad \qquad \text{in P} \qquad \qquad \text{in I}
 \end{array} \quad (\text{B.14})$$

Damit lassen sich dann die Wellenfunktionen $\psi_{\omega}^{\pm}$ und die Beobachterwellenfunktion ψ_{ω} sofort konstruieren.

B Berechnung von $(\psi_{p,\uparrow}^{\pm}, \psi_{\omega,\uparrow}^{\pm})_{\Sigma_0}$

Wir transformieren $\psi_{\omega,\uparrow}^{\pm}$ wie einen Skalar in das Minkowski - Koordinatensystem.

Auf der Hyperfläche $\Sigma_0(t = 0)$ genügen dann $\psi_{\omega}^{\pm}$ und $\psi_p^{\pm}$ der selben Gleichung und wir können formal $(\psi_{p,\uparrow}^{\pm}, \psi_{\omega,\uparrow}^{\pm})_{\Sigma_0}$ berechnen

$$|^{+}\psi_{\omega,\uparrow}\rangle = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} ({}^I\psi_{\omega} - i e^{-\pi\omega} {}^I\psi_{\omega}) \text{ auf } \Sigma_0 \quad (\text{C.1})$$

$$|^{-}\psi_{\omega,\uparrow}\rangle = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} (e^{-\pi\omega} {}^I\psi_{\omega} + i {}^I\psi_{\omega}) \text{ auf } \Sigma_0 \quad (\text{C.2})$$

Wegen $(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \, du \, \bar{\Psi}_1 \gamma^0 \Psi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} du \, \Psi_1^\dagger \Psi_2$ auf Σ_0 ist

$$(\Psi_{p,\uparrow}^+, \Psi_{w,\uparrow}^+) = \sqrt{\frac{(E+m)m}{96 E}} \left\{ \int_0^\infty du \, e^{-ipu} \left[\left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^- + \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^+ \right] - i e^{-\pi w} \int_0^\infty du \, e^{ipu} \left[\left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^- - \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^+ \right] \right\} \quad (C.3)$$

und

$$(\Psi_{p,\uparrow}^-, \Psi_{w,\uparrow}^+) = \sqrt{\frac{(E+m)m}{96 E}} \left\{ \int_0^\infty du \, e^{-ipu} \left[\left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^- - \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^+ \right] - i e^{-\pi w} \int_0^\infty du \, e^{ipu} \left[\left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^- + \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \phi_w^+ \right] \right\} \quad (C.4)$$

d.h. wir benötigen die folgenden vier Integrale

$$\begin{aligned} 1/2) & \int_0^\infty du \, e^{\mp ipu} H_{i\omega - 1/2}^{(1)}(imu) \\ 3/4) & \int_0^\infty du \, e^{\mp ipu} H_{i\omega + 1/2}^{(1)}(imu) \end{aligned} \quad (C.5)$$

Mit $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i})$

und

$$\int_0^\infty K_\nu(ax) \sin(bx) \, dx = \frac{\pi}{4} a^{-\nu} \operatorname{cosec}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) (a^2 + b^2)^{-1/2} \left\{ \left[(b^2 + a^2)^{1/2} + b \right]^\nu - \left[(b^2 + a^2)^{1/2} - b \right]^\nu \right\} \quad (C.6a)$$

$$[\operatorname{Re} a > 0, b > 0, |\operatorname{Re} \nu| < 2, \nu \neq 0]$$

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(ax) \cos(bx) dx = \frac{\pi}{4} (b^2 + a^2)^{-1/2} \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \left\{ a^{-\nu} [b + (b^2 + a^2)^{1/2}]^{\nu} + a^{\nu} [b + (b^2 + a^2)^{1/2}]^{-\nu} \right\} \quad (C.6b)$$

$$[\operatorname{Re} a > 0, b > 0, |\operatorname{Re} \nu| < 1]$$

findet man : $\beta \equiv \left(\frac{E+p}{m} \right) \quad E^2 = p^2 + m^2$

$$\int_0^{\infty} du e^{-ipu} H_{i\omega-1/2}^{(1)}(imu) = \frac{1}{E \operatorname{ch} \pi \omega} \left[\beta^{i\omega-1/2} - i e^{\pi \omega} \beta^{-i\omega+1/2} \right] \quad (C.7a)$$

$$\int_0^{\infty} du e^{+ipu} H_{i\omega-1/2}^{(1)}(imu) = \frac{1}{E \operatorname{ch} \pi \omega} \left[\beta^{-i\omega+1/2} - i e^{\pi \omega} \beta^{i\omega-1/2} \right] \quad (C.7b)$$

$$\int_0^{\infty} du e^{-ipu} H_{i\omega+1/2}^{(1)}(imu) = \frac{-1}{E \operatorname{ch} \pi \omega} \left[\beta^{i\omega+1/2} + i e^{\pi \omega} \beta^{-i\omega-1/2} \right] \quad (C.7c)$$

$$\int_0^{\infty} du e^{+ipu} H_{i\omega+1/2}^{(1)}(imu) = \frac{-1}{E \operatorname{ch} \pi \omega} \left[\beta^{-i\omega-1/2} + i e^{\pi \omega} \beta^{i\omega+1/2} \right] \quad (C.7d)$$

Dabei wurden folgende Relationen benutzt: $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} (i\omega - \frac{1}{2})$

$$i) \quad \sec \alpha - i \operatorname{cosec} \alpha = -i e^{-\pi \omega/2} e^{-i\pi/4}$$

$$ii) \quad \sec \alpha + i \operatorname{cosec} \alpha = i e^{\pi \omega/2} e^{i\pi/4}$$

$$iii) \quad \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{ch} \pi \omega$$

$$iv) \quad \left(\frac{E-p}{m} \right)^{-\nu} = \beta^{\nu} \quad (C.8)$$

Damit ergibt sich dann sofort

$$(\Psi_{p,\uparrow}, \Psi_{\omega,\uparrow}^+)_{\Sigma_0} = 0 \quad (C.9)$$

Wenn man beachtet, daß gilt

$$\sqrt{\frac{(E+m+p)^2}{(E+p)(E+m)}} = \sqrt{2} \quad (C.10)$$

so findet man

$$(\Psi_{p,\uparrow}^+, \Psi_{\omega,\uparrow}^+) = \frac{-i}{\sqrt{3E}} \left(\frac{E+p}{m} \right)^{-i\omega} \quad (C.11)$$

und ferner

$$(\Psi_{p,\uparrow}^+, \Psi_{\omega,\uparrow}^-) = 0 \quad (C.12)$$

$$(\Psi_{p,\uparrow}^-, \Psi_{\omega,\uparrow}^-) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{E+p}{m} \right)^{i\omega} \quad (C.13)$$

D Zur Konstruktion von $\tilde{\Psi}_\omega^\pm$

Zur Konstruktion von $\tilde{\Psi}_\omega^\pm$ benötigen wir die Asymptotik von I, II $\tilde{\Psi}_\omega$ und F, P $\tilde{\Psi}_\omega$.

Man findet mit den Relationen (B.1)

$$\begin{aligned} \text{I } \tilde{\Psi}_\omega &\rightarrow \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} \left(\frac{im}{2} \right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\lambda} e^{i(\omega + \frac{i}{4})\ln(z-t)} e^{-\frac{1}{4}\ln(z+t)} \right. \\ &\quad \left. + i e^{-i\lambda} e^{-i(\omega - \frac{i}{4})\ln(z+t)} e^{-\frac{1}{4}\ln(z-t)} \right) \end{aligned} \quad (D.1a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\omega}^{(+)} &\rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m}{z}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{-\pi\omega} e^{i(\omega + \frac{1}{4}) \ln(t-z)} e^{-\frac{1}{4} \ln(t+z)} \bar{z} \right. \\ &\quad \left. i e^{-i\Lambda} e^{-i(\omega - \frac{1}{4}) \ln(t+z)} e^{-\frac{1}{4} \ln(t-z)} \right) \end{aligned} \quad (D.1b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\omega}^{-} &\rightarrow \frac{e^{\pi\omega/2}}{\pi} \left(\frac{im}{z}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{i(\omega + \frac{1}{4}) \ln(t-z)} e^{-\frac{1}{4} \ln(-z-t)} \bar{z} \right. \\ &\quad \left. i e^{-i\Lambda} e^{-i(\omega - \frac{1}{4}) \ln(-z-t)} e^{-\frac{1}{4} \ln(t-z)} \right) \end{aligned} \quad (D.1c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\omega}^{(+)} &\rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{m}{z}\right)^{-1/2} \Gamma \left(e^{i\Lambda} e^{-\pi\omega} e^{i(\omega + \frac{1}{4}) \ln(z-t)} e^{-\frac{1}{4} \ln(-z-t)} \bar{z} \right. \\ &\quad \left. i e^{-i\Lambda} e^{-i(\omega - \frac{1}{4}) \ln(-z-t)} e^{-\frac{1}{4} \ln(z-t)} \right) \end{aligned} \quad (D.1d)$$

Um $\tilde{\Psi}_{\omega}^{\pm}$ zu konstruieren, benutzt man am besten Nullkoordinaten: $\eta \equiv z - t$, $\xi \equiv z + t$.

Für die Konstruktion von $\tilde{\Psi}_{\omega}^{(\pm)}$ komplexifizieren wir gemäß

$$(t, z) \rightarrow (t + i\varepsilon, z) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}^+)$$

$$\eta \rightarrow \eta \pm i\varepsilon$$

$$\xi \rightarrow \xi \mp i\varepsilon \quad (D.2)$$

So geht beim Übergang I nach F etwa η durch Null.

In I ist $\eta > 0$ und hat dort einen positiven Imaginärteil.

Die analytische Fortsetzung von $\ln \eta$ ins Gebiet F lautet also $\ln(-\eta) + i\pi$.

Auf diese Art und Weise können wir dann die Gesamtwellenfunktion $\tilde{\Psi}_{\omega}^{\pm}$ generieren.

E Asymptotische Strukturen und Penrose - Diagramme

Die Ränder einer vierdimensionalen Raum - Zeit wurde
üblicherweise so bezeichnet:

$I^{+(-)}$: zeitartig unendlich in der Zukunft (Vergangenheit).

$I^{+(-)}$ ist die Region, wo alle zeitartigen Trajektorien (Fußgänger) in der Zukunft enden (aus der Vergangenheit herkommen).

I^0 : raumartig unendlich.

I^0 ist die Region, welche man zu beliebiger aber festen Zeit t mit $r \rightarrow \infty$ erreicht.

$\mathcal{J}^{+(-)}$: Nullunendlich in der Zukunft (Vergangenheit).

$\mathcal{J}^{+(-)}$ ist die Region, wo alle Lichtkurven (masselosen Teilchen) in der Zukunft enden (aus der Vergangenheit herkommen).

In einem Penrose - Diagramm werden durch eine konforme Abbildung $ds^2 \rightarrow \Omega(x) ds^2$ die Ränder von $\mathcal{M}$ in endliche Bereiche des neuen Koordinatensystems abgebildet.

Literaturnachweis:

- 1) H. Rumpf, Ph. D. Thesis, 1977, Wien
- 2) W. Pieper und W. Greiner, 1969, Z. Phys. 128, 327
- 3) B. Müller, J. Rafelski und W. Greiner, 1972,
Z. Phys. 257, 82, 163
- 4) W. Heisenberg und H. Euler, 1936, Z. Phys 98, 714
- 5) J. Reinhardt und W. Greiner, 1977, Rep. Prop.Phys.
40, 219
- 6) B. Müller und W. Greiner, Acta Physica Austriaca,
Suppl. XVIII, (1977) 153
- 7) C. Kozhuharov, P. Kienle, D. Jakubassa und M. Kleber,
1977, Phys. Rev. Lett. 39, 540
- 8) W. Meyerhof, T. Saylor, S. Lazarus, W. Little und
B. Triplett, 1973, Phys. Rev. Lett. 30, 1279
- 9) F. Bosch, H. Krimm, B. Martin, B. Povh, K. Traxel und
T. Walcher, 1978, preprint MPI H - 1978 - V10
- 10) F. Saris, W. von der Weg, H. Tawara und W. Lambert,
1972, Phys. Rev. Lett. 28, 717
- 11) J. Greenberg, H. Bokemeyer, H. Emling, E. Grosse,
D. Schwalm und F. Bosch, 1977, Phys. Rev. Lett 39,
1404
- 12) J. Rafelski, B. Müller und W. Greiner, 1978, Z. Phys.
- 13) J. Rafelski, L. Fulcher und A. Klein, 1978, Phys. Rep.
38C, 227
- 14) H. Rumpf, 1976, Phys. Lett. 61B, 272
- 15) H. Rumpf, 1976, Nuovo Cimento 35 B, 321

- 16) H. Rumpf und H. Urbantke, 1978, Ann.Phys.114,332
- 17) A. Nikishov, 1970, Sov. Phys. JETP 30, 660
- 18) A. Müller, B. Müller und W. Greiner, 1979,
Cosmological Particle Production, Univ. Ffm. pre-
print
- 19) A. Müller, Ph. D. Thesis, 1979, Frankfurt
- 20) J. Audretsch / G. Schäfer, 1978, J.Phys.A 11,1583
- 21) J. Audretsch / G. Schäfer, 1978, Phys.Lett. 66A, 459
- 22) B. Müller und J. Rafelski, 1975, Phys. Rev. Lett. 34,
349
- 23) B. de Witt, 1975, Phys. Rep. 19C, 6
- 24) S. Fulling, 1973, Phys. Rev. D7, 2850
- 25) P. C. Davies, 1975, J. Phys. A8, 609
- 26) W. Unruh, 1976, Phys. Rev. D14, 870
- 27) A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyupkin,
1975, Phys. Lett. 59B, 85
- 28) Jackiw, R. und Rebbi, C., 1976, Phys. Rev. Lett. 37,
172
- 29) A. Schwarz, 1977, Phys. Lett. 67B, 172
- 30) C. Callan, R. Dashen und D. Gross, 1976, Phys. Lett.
63B, 334
- 31) J. Mandula, 1976, Phys. Rev. D14, 3497
- 32) J. Mandula, 1977, Phys. Lett. 67B, 175
- 33) J. Wess und B. Zumino, 1974, Nucl. Phys. B70, 39
- 34) J. Wess und B. Zumino, 1974, Phys. Lett. 49B, 52
- 35) S. Deser und B. Zumino, 1976, Phys. Lett. 62B, 335
- 36) A. Salam und J. Strathdee, 1974, Phys. Lett. 51B, 353
- 37) R. Utiyama, 1956, Phys. Rev. 101, 1597

- 38) T. Kibble, 1961, J. Math. Phys., 2, 212
- 39) F. Hehl, P. von der Heyde, G. Kerlick, 1976,
Rev. Mod. Phys. 48, 3
- 40) A. Achieser, W. Berestezki, Quantenelektrodynamik,
Frankfurt am Main 1962
- 41) E. Schmutzer, Relativistische Physik, Teubner 1968
- 42) D. Brill und J. A. Wheeler, 1957, Rev. Mod. Phys. 29,
465
- 43) M. Soffel, B. Müller und W. Greiner, J. Phys. A10,
551
- 44) J. Dowker, 1978, J. Phys. A11, 347
- 45) C. Misner, K. Thorne und J. - A. Wheeler, Gravitation,
Freeman 1973
- 46) L. Landau und E. Lifschitz, Klassische Feldtheorie,
Akademie 1973
- 47) G. Soff, B. Müller, J. Rafelski und W. Greiner, 1973,
Zeitschrift f. Naturforschung 28a, 1389
- 48) R. Adler, M. Bazin und M. Schiffer, 1965, Introduction
to General Relativity, Mc Graw Hill
- 49) A. Papapetrou, 1956, Ann. Phys. Lpz. 17, 214
- 50) S. Hawking, 1974, Nature 248, 30
- 51) S. Hawking, 1975, Commun. Math. Phys. 43, 199
- 52) G. Gibbons, 1975, Commun. Math. Phys. 44, 245
- 53) Th. Damour und R. Ruffini, 1975, Phys. Rev. Lett. 35,
463
- 54) J. Schwinger, 1951, Phys. Rev. 82, 664
- 55) G. Kerlick, 1975, Phys. Rev. D12, 3004
- 56) H. Rumpf, "Creation of Dirac - Particles in General

Relativity with Torsion and Electromagnetism I, II, III" GRG in print

57) M. Soffel, B. Müller und W. Greiner, 1979, Phys. Lett. 70A, 167

58) W. Rindler, 1966, Am. J. Phys. 34, 1174

59) M. Soffel, B. Müller und W. Greiner, Dirac - Particles in Rindler - Space, Frankfurt 1979, preprint

60) S. Christensen und M. Duff, 1978, Nucl. Phys. B146, 11

61) P. Gilkey, 1975, Adv. in Math. 15, 334

62) M. Abramowitz, I. Stegun, 1965, Handbook of Mathematical Functions, Dover

63) C. Bernard, 1974, Phys. Rev. D9, 3312

64) L. Dolan und R. Jackiw, 1974, Phys. Rev. D9, 3320

65) N. Sanchez, 1979, Quantum Field Theory in Non Inertial Frames I, II, Meudon (Paris) preprint

66) N. Sanchez, 1979, Thermal and Non - Thermal Particle Production without Event Horizons, Meudon (Paris) reprint

67) N. Sanchez, 1979, Topological Invariants and Thermal Properties of Analytic Mappings, Meudon (Paris) reprint

68) S. Hawking, G. Ellis, 1974, The Large Scale Structure of Space - Time, Cambridge

69) Zur kurzen Erläuterung der asymptotischen Strukturen

$\mathcal{I}^-$, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^0$, $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$ und Penrose - Diagrammen s. Ref.

45

70) J. Jackson, 1962, Classical Electrodynamics, Wiley

71) T. Fulton und F. Rohrlich, 1960, Ann. Phys. 9, 499

72) Das klassische Strahlungsproblem bewegter Punktladungen ist sehr alt und wurde seit 1898 heftig in der Literatur diskutiert.

Der interessierte Leser kann die Historie dieser Diskussion anhand folgender Referenzen verfolgen

73 - 106 :

73) A. Liénard, 1898, L'éclairage électrique 16, 5, 53;
106

74) E. Wiechert, 1900, Arch. néerl. (2), 5, 549

75) M. Born, 1909, Ann. d. Physik, 30, 11

76) G. Schott, 1915, Phil. Mag. 29, 49

77) S. Milner, 1921, Phil. Mag. 41, 405

78) E. Cunningham, 1910, Proc. London Math. Soc. 8, 77

79) H. Bateman, 1910, Proc. London Math. Soc. 8, 223

80) C. Leibovitz, A. Peres, 1963, Ann. Phys. 25, 400

81) Ref. 71

82) D. Drukey, 1949, Phys. Rev. 76, 543

83) M. Bondi und T. Gold, 1955, Proc. Royal Soc. A229, 416

84) F. Rohrlich, 1960, Am. J. Phys. 28, 639

85) N. Rosen, 1962, Ann. Phys. 17, 269

86) T. Bradburg, 1962, Ann. Phys. 19, 323

87) A. Nikishov und V. Ritus, 1969, Sov. Phys. JETP 29,
1093

88) Ginzburg, 1970, Sov. Phys. Usp. 12, 565

89) D. Leiter, 1969, Ann. Phys. 51, 561

90) T. Boyer, 1972, Am. J. Phys. 40, 1843

91) P. Hogan, 1974, Proc. Cambr. Philos. Soc. 76, 359

- 92) J. Huschild, W. Baylis, 1974, Phys. Rev. D9, 2479
- 93) P. Pascual, L. Mas, 1974, Phys. Rev. D9, 2482
- 94) A. Kukanov, A. Konstantinovich, 1973, Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron. 14, 627
- 95) W. Bonnor, 1974, Proc. Royal Soc. A337, 591
- 96) G. Lanyi, 1973, Phys. Rev. D8
- 97) J. Daboul, 1974, Int. J. Theor. Phys. 11, 145
- 98) D. Villaroel, 1975, Ann. Phys. 89, 241
- 99) A. Barut, 1974, Phys. Rev. D10, 3335
- 100) D. Villaroel, 1975, Ann. Phys. 90, 113
- 101) R. Tabensky, D. Villaroel, 1975, J. Math. Phys. 16, 1380
- 102) A. Kukanov, 1974, Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron. 15, 683
- 103) T. Gutsunaev, 1975, Pis'ma V. Zh. Tekh. Fiz. 1, 192
- 104) E. Marx, 1975, Int. J. Theor. Phys. 14, 55
- 105) W. Unruh, 1976, Proc. Royal. Soc. A 348, 447
- 106) R. Tabensky, 1976, Phys. Rev. D13, 267

- 107) R. Matzner, 1978, GRG 9, 71
- 108) J. Cohen, R. Wald, 1971, J. Math. Phys. 12, 1842
- 109) R. Ruffini, 1972, Phys. Lett. 41B, 334
- 110) R. Ruffini, in Black Holes, ed. by de Witt, de Witt, Gordon and Breach 1973
- 111) J. Bekenstein, 1973, Phys. Rev. D7, 2333
- 112) W. Unruh, 1976, Phys. Rev. D14, 870
- 113) L. Parker, 1975, Phys. Rev. D12, 1519
- 114) R. Wald, 1975, Commun. Math. Phys. 45, 9

- 115) S. Hawking, 1976, Phys. Rev. D14, 2460
- 116) L. Landau, E. Lifschitz, Statistical Physics, 1958, Pergamon Press
- 117) H. Ohanian, Gravitation and Space - Time, 1976, Norton
- 118) R. Penrose, 1969, Nuovo Cimento 1, 252
- 119) M. Magg, 1978, Phys. Lett. 74B, 246
- 120) Zur Ableitung der verwendeten Formeln siehe Ref. 62 und
- 121) I. Gradshteyn, I. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 1965, Academic Press
- 122) L. Schiff, H. Snyder und J. Weinberg, 1940, Phys. Rev. 57, 315
- 123) J. Dowker, 1977, J. Phys. A10, 115
- 124) W. Troost, H. van Dam, 1977, Phys. Lett. 71B, 149
- 125) M. Soffel, B. Müller und W. Greiner, "Radiation and the global Structure of Space - Time", 1979, erscheint in General Relativity and Gravitation
- 126) I. Batalin, S. Matinyan, G. Savvidi, 1978, Sov. J. Nucl. Phys. 26, 214
- 127) S. Matinyan, G. Savvidi, 1978, Nucl. Phys. B134, 539
- 128) N. Nielson, P. Oleson, 1978, Nucl. Phys. B144, 376
- 129) J. Jauch, F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Springer, 1976

Figurenbeschreibung

Fig. 1 (a) zeigt die am stärksten gebundenen Zustände der Dirac - Gleichung für Kerne der Ladung Z . Die gestrichelten (durchgezogenen) Kurven beziehen sich auf Punkt - (ausgedehnte) Kerne. In (b) sind die dynamischen Prozesse, die im Schwerionenstoß mit Teilchenanregung verknüpft sind, angezeigt.

Fig. 2 zeigt die untersten Energieniveaus der Dirac - Gleichung im Newton'schen Potential ($g = GMm$).

Fig. 3 zeigt die untersten $s_{1/2}$ - Energiewerte der Dirac - Gleichung im Feld einer gravitierenden Massenschale als Funktion des Schalenradius r_0 .

Fig. 4 Die untersten $s_{1/2}$ - Niveaus eines Atomes im Schwarzschild - Feld sind gegen den Ort r / r_s des Atomes abgebildet.

Fig. 5 (a) zeigt das effektive Potential im Schwarzschild - Feld. Das effektive Potential für ein

negativ (positiv) geladenes Schwarzes Loch wird in (b, c) demonstriert.

Fig. 6 zeigt die Regionen, in denen ein geladenes Schwarzes Loch spontan Paare aus dem Vakuum bildet. Paarbildung tritt auf, falls $Q > \frac{GMm}{e}$ gilt, effektiv aber erst für $Q > \frac{G^2 m^2}{ehc} M^2$.

Fig. 7 zeigt die ersten vier gebundenen Zustände für die zweidimensionale Dirac - Gleichung in einem Torsionsrechteckpotential.

Fig. 8 Die Fermi - Fläche $\mathcal{F}$ für das überkritische Vakuum mit Spin wird für $V = -3m, -4m$ und $-5m$ gezeigt.

Fig. 9 Die effektive totale Anzahl von Spins ist abgebildet gegen die Anzahl nackter Spins. Man sieht, wie Teile des Hintergrundes durch den Spin des Vakuums kompensiert werden (durchgezogene Kurve). Die gestrichelte Kurve zeigt das gleiche falls der Spin der Testteilchen total in z - Richtung polarisiert wäre.

Fig. 10 Aufgrund der Dynamik des gleichförmig beschleunigten Beobachters wird der zweidimensionale Minkowski - Raum in vier Sektoren zerlegt: rechts (I), links (II), Zukunft (F) und Vergan-

heit (P).

Fig. 11 zeigt die Bewegung eines gleichförmig beschleunigten Beobachters im euklidischen Minkowski - Raum.

Fig. 12 (a) zeigt die Topologie $\mathbb{R}^2$ des inertialen Beobachters, (b) zeigt die Topologie $\mathbb{R} \times S^1$ des gleichförmig beschleunigten Beobachters im zweidimensionalen euklidischen Minkowski - Raum.

Fig. 13 Die Mannigfaltigkeit mit $ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2$ und $\phi = \phi + \beta$ ist eine Kegeloberfläche mit halbem Öffnungswinkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)$.

Fig. 14 (a) In einem zweidimensionalen Schnitt durch den Minkowski - Raum sind die Richtungen zeitartig (T), raumartig (S) und lichtartig (O) eingetragen.

(b) zeigt ein Penrose - Diagramm des zweidimensionalen Minkowski - Raumes.

Die asymptotischen Strukturen der Mannigfaltigkeit, $I^\pm$, I^0 , $\mathcal{H}^\pm$ sind als Rand des Minkowski - Raumes zu sehen.

Fig. 15 Die geometrischen Größen, welche in den Liénard - Wiechert - Potentialen auftreten, werden gezeigt.

Fig. 16 zeigt eine Punktladung Q , welche in z - Richtung beschleunigt ist.

Der gestreifte Teil zeigt die Region, in der das Beschleunigungsfeld gegenüber dem quasistatischen Anteil dominiert.

Die Polarisation des EM - Feldes dreht sich von longitudinal im Nahfeld zu transversal in der Fernzone.

Eine typische Wellenlänge, wie sie von Q emittiert wird, ist zu sehen.

Fig. 17 (a) zeigt die Trajektorie des gleichförmig beschleunigten Beobachters im Minkowski - Raum.
(b) zeigt ein Penrose - Diagramm dieser Situation.

Fig. 18 (a) Das + Zeichen in Gleichung (15.6) korrespondiert einer retardierten Zeit für $z_p - t_p > 0$ (gestrichelte Region) und einer avancierten Zeit für $z_p - t_p < 0$.
(b) zeigt die gleiche Situation für das - Zeichen in Gleichung (15.6)

Fig. 19 (a) Eine Punktladung q wird durch das EM - Feld einer großen Ladung Q abgelenkt. Vom Q - System aus gesehen, trägt q eine Wolke virtueller Photonen entlang ihrer Trajektorie, welche von q separiert wird, wenn q durch das Coulomb - Feld von

Q abgelenkt wird.

Diese separierten Photonen bilden die Bremsstrahlung, welche zu γ^+ gelangt.

(b) Wird q rein gravitativ abgelenkt, so kann die Wolke virtueller Photonen der Bewegung von q teilweise folgen, und die resultierende Bremsstrahlung ist unterdrückt.

Fig. 20 zeigt ein Penrose - Diagramm einer Raum - Zeit Mannigfaltigkeit, wie sie aus einem Gravitationskollaps hervorgeht.

H ist der Ereignishorizont, S die Singularität der Mannigfaltigkeit.

Fig. 21 zeigt die Feldlinien einer Punktladung Q für verschiedene Positionen im Schwarzschild - Feld außerhalb des Ereignishorizontes.

Fig. 22 zeigt den Dipol und Quadrupolanteil der asymptotischen Bremsstrahlung für ein im Schwarzschild - Feld frei fallende Punktladung Q .

Anfänglich war Q in Ruhe bei $r \rightarrow \infty$.

Meine akademischen Lehrer waren

Prof. K. Apel, Prof. F. Constantinescu, Prof. M. Czerny,
Prof. R. Dreizler, Prof. Drygas, Prof. U. Gerhardt,
Prof. Gerritzen, Prof. W. Greiner, Prof. Hartmann,
Prof. Hensen, Prof. Hirst, Prof. H. Kerner, Prof. K. König,
Prof. W. Martienssen, Prof. J. Maruhn, Prof. G. Mauck,
Prof. Metzler, Prof. B. Mrowka, Dr. M. Mrowka,
Prof. B. Müller, Prof. A. Münster, Prof. H. Müser,
Prof. Pohlitz, Prof. J. Rafelski, Prof. Schaarschmidt,
Prof. E. Schopper, Dr. U. Schröder, Prof. Schnorr,
Prof. Schlögel, Dr. O. Seeberg, Prof. Soergel, Prof. Specht
und Prof. Szasz.

Lebenslauf

Am 14. März 1953 wurde ich in Ingelheim am Rhein als Sohn des Apothekers Werner Soffel und seiner Ehefrau Gusti Soffel geb. Steinborn geboren.

Von 1959 bis 1961 besuchte ich die Linné - Schule in Frankfurt am Main, von 1961 bis 1963 die Geschwister - Scholl - Schule in Langen/Hessen.

Bis Mai 1971 besuchte ich das Dreieich - Gymnasium in Langen, wo ich das Abitur ablegte.

Seit Oktober 1971 studierte ich an der Johann Wolfgang Goethe - Universität zu Frankfurt am Main Physik und Mathematik.

Nach der Diplom - Vorprüfung im Oktober 1973 studierte ich für ein Semester Physik an der Universität Heidelberg.

Danach wechselte ich zurück nach Frankfurt, wo ich im November 1976 meine Diplom - Hauptprüfung bestand.

Seitdem bin ich im Institut für Theoretische Physik als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.

Danksagung

Entscheidend für das Entstehen der vorliegenden Arbeit war die freundliche Zusammenarbeit im Institut für Theoretische Physik in Frankfurt am Main.

Insbesondere verdanke ich es meinen Lehrern Prof. Dr. W. Greiner und Prof. Dr. B. Müller, daß sie mich zur Beschäftigung mit diesem Thema angeregt und mir die Bedeutung vieler auftretender Probleme bewußt gemacht haben.

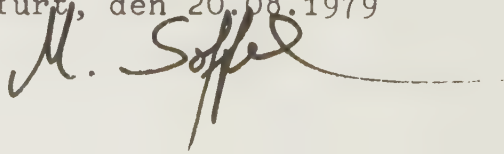
Von großem Wert waren für mich ferner die vielen Diskussionen mit U. Heinz sowie den anderen Mitgliedern der Frankfurter Gravitationsgruppe: A. Müller, G. Schmidt und J. Theis.

Mein Dank gilt weiterhin H. Rumpf und N. Sanchez für das frühzeitige Überlassen von Manuskripten, welche in der vorliegenden Arbeit Verwendung fanden.

P. Zöllner danke ich für das Tippen dieser Arbeit, Frau Utschig und Frau Roth danke ich für die Anfertigung der Zeichnungen, Herrn Brose für den Druck der Arbeit.

Der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) sei für die Bereitstellung von Computerzeit gedankt

Frankfurt, den 20.08.1979

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'M. Soffel', with a long horizontal stroke extending to the right.

